

PHƯƠNG PHÁP TỰA GIÁ TRỊ BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN CÓ CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO THỜI GIAN TRONG TỌA ĐỘ CỰC

A quasi-boundary value method for the inhomogeneous time-fractional diffusion equation in polar coordinates

Phan Thị Minh Nga^{(1)*}, Lưu Hồng Phong⁽²⁾

⁽¹⁾Trường Trung học Phổ thông Lê Thánh Tôn

⁽²⁾Trường Trung học Cơ sở Lam Sơn

TÓM TẮT

Trong hai thập kỷ qua, các phương trình đạo hàm riêng bậc không nguyên đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu nhờ khả năng ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kỹ thuật và khoa học. Trong nghiên cứu này, chúng tôi xem xét bài toán ngược cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian (TFPE) không thuần nhất trong hệ tọa độ cực. Bài toán này được đặt ra nhằm phục hồi lại mật độ ban đầu của một chất dựa trên dữ liệu cuối trên một đĩa tròn. Như đã biết, bài toán ngược cho phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian là một bài toán không chỉnh. Vì vậy chúng tôi đề xuất sử dụng phương pháp tựa giá trị biên (QBV) để xây dựng nghiệm chỉnh hóa cho bài toán. Dựa trên các điều kiện tiên nghiệm, chúng tôi thu được ước lượng sai số dưới dạng Hölder giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa. Cuối cùng, một ví dụ số được đề xuất để minh họa tính khả thi và hiệu quả cho phương pháp của chúng tôi.

Từ khóa: Phương trình khuếch tán ngược bậc không nguyên theo thời gian, phương pháp tựa giá trị biên, tọa độ cực, khai triển Bessel.

ABSTRACT

Over the past two decades, partial differential equations associated with fractional derivatives have become an interest of many authors because of their multiform applications in practical engineering. In this work, we consider a backward problem for an inhomogeneous time-fractional diffusion equation in polar coordinates. Such a backward problem is applied when we do not know the initial density of substance, so we can obtain it from observation of the density at the final time on a disk. As we known, the backward time-fractional diffusion problem is severely ill-posed, so the quasi-boundary value (QBV) method is proposed to establish the regularized solution of this problem. Finally, under some a priori conditions on the exact solution, a Hölder type of the convergence rate for the regularized solution is proved. To illustrate the applicability and effectiveness of our method, we present a numerical experiment.

Keywords: Backward time-fractional diffusion equation, quasi-boundary value method, polar coordinates, Bessel's expansion.

*Tác giả liên hệ: minhnga.llcm@gmail.com

1. Giới thiệu

Xét Ω là một đĩa tròn có bán kính a , tức là, $\Omega = (0, a) \times (0, 2\pi)$, chúng tôi nghiên

cứu bài toán xác định nhiệt độ $u(r, \theta, t)$ thỏa mãn bài toán ngược cho phương trình parabolic sau

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + q(r, \theta), & (r, \theta) \in \Omega, t \in (0, T), \\ u(a, \theta, t) = 0, & \theta \in (0, 2\pi), t \in (0, T), \\ u(r, \theta, T) = f(r, \theta), & (r, \theta) \in \Omega, \\ |u(0, \theta, t)| < \infty, & \theta \in (0, 2\pi), t \in (0, T), \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó, $T > 0$, q là hàm nguồn đã cho thuộc vào $L^2(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$ là bậc không nguyên của đạo hàm theo thời gian, D_t^α là đạo hàm bậc không nguyên Caputo [8] được định nghĩa bởi

$$D_t^\alpha u := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} u(r, \theta, s) ds,$$

và f là phân bố nhiệt độ tại thời điểm cuối. Mục tiêu của bài toán (1.1) là xác định nhiệt độ ban đầu trên đĩa tròn $u(r, \theta, t)$, với $t \in [0, T)$ thông qua các dữ liệu đo $(f^\varepsilon, q^\varepsilon)$ thuộc vào $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ sao cho

$$\|f^\varepsilon - f\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|q^\varepsilon - q\|_2 \leq \varepsilon, \quad (1.2)$$

trong đó, ε là sai số giữa dữ liệu chính xác và dữ liệu đo được, và chuẩn $\|\cdot\|_2$ sẽ được định nghĩa sau. Lưu ý rằng nếu $\alpha = 1$, thì phương trình đầu tiên trong (1.1) trở thành một phương trình parabolic cổ điển trong hệ tọa độ cực, đã được nghiên cứu bởi Cheng và các cộng sự trong các bài báo [2, 3].

Gần đây, phương trình khuếch tán có đạo hàm bậc không nguyên (FDE) đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu do các ứng dụng đa dạng trong sinh học, kỹ thuật, vật lý, đàn hồi nhớt, v.v...

Một điểm mạnh của phương trình FDE, đó là, có thể được áp dụng để mô tả các hiện tượng khuếch tán bất thường thay vì sử dụng phương trình khuếch tán cổ điển chứa đạo hàm bậc nguyên. Do đó, phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian (TFDE) được xây dựng bằng cách thay thế đạo hàm bậc nguyên bằng đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian và có thể sử dụng để mô tả các hiện tượng siêu khuếch tán và khuếch tán chậm.

Như đã biết, bài toán thuận cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên nhằm tìm nghiệm thỏa mãn phương trình vi phân đầu tiên trong bài toán (1.1) cùng với các điều kiện ban đầu và điều kiện biên. Bài toán này, còn được gọi là bài toán giá trị ban đầu hoặc bài toán biên ban đầu cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian, đã được nghiên cứu rộng rãi trong những năm gần đây. Chẳng hạn, các nghiên cứu gần đây đã xem xét tính duy nhất và sự tồn tại nghiệm [7], xây dựng công thức nghiệm giải tích dựa trên hàm Mittag-Leffler [8], và đánh giá độ chính xác của nghiệm bằng phương pháp phần tử hữu hạn [4, 5], cùng với nhiều phương pháp khác.

Tuy nhiên, trên thực tế, một phần điều kiện biên hoặc điều kiện ban đầu có thể không được biết trước, và chúng ta cần xác

định chúng thông qua một số điều kiện bổ sung (còn gọi là dữ liệu đầu ra thu được từ quan sát thực nghiệm). Những bài toán như vậy được gọi là bài toán ngược. Bài toán ngược khuếch tán đóng vai trò then chốt trong nhiều ứng dụng kỹ thuật, với mục tiêu khôi phục trạng thái ban đầu hoặc trước đó của trường vật lý từ dữ liệu đo ở thời điểm hiện tại. Cho đến nay, đã có nhiều nghiên

cứu về bài toán ngược có chứa đạo hàm bậc không nguyên được thực hiện bởi nhiều tác giả; chúng tôi xin giới thiệu đến bạn đọc một số tài liệu tham khảo quan trọng trong [1, 6, 10, 13]. Gần đây, Nguyễn Huy Tuấn và các cộng sự [11] đã nghiên cứu bài toán ngược cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian với nguồn không thuần nhất sau đây

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = Lu(x,t) + G(x,t), & (x,t) \in \Omega' \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega' \times (0,T), \\ u(x,T) = g(x), & x \in \Omega', \end{cases} \quad (1.3)$$

trong đó, $\Omega' \subset \square^d$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega'$ đủ trơn. Hơn nữa, bằng phương pháp chỉnh hóa Tikhonov, các tác giả đã xây dựng một nghiệm chỉnh hóa cho bài toán (1.3) và nghiên cứu tính ổn định của

nghiệm này. Gần đây, Xiong X. và Ma X. [12] đã xem xét bài toán ngược thời gian (BPP) trong hệ tọa độ cực cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên có tính đối xứng trục

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(r,t) - \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0, & 0 < r < r_0, 0 < t < T, \\ u(r_0, t) &= 0, & 0 < t < T, \\ u(r, 0) = 0, u(r, T) &= g(r), & 0 < r < r_0, \\ |u(0, t)| < \infty, & & 0 < t < T, \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó, g là phân bố nhiệt độ tại thời điểm cuối. Các tác giả đã xây dựng công thức nghiệm chỉnh hóa, dựa trên ý tưởng của phương pháp phổ và phương pháp chỉnh hóa Tikhonov. Tuy nhiên, trong [12], ước lượng sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa chưa được trình bày.

Bài toán (1.1) cho thấy rằng nghiên cứu này có thể được xem như một sự tiếp nối của chuỗi các công trình đã đề cập trước đó về bài toán ngược có chứa đạo hàm bậc không nguyên. Trong các ứng dụng thực tiễn, mô hình vật lý của bài toán ngược cho phương trình khuếch tán bậc

không nguyên theo thời gian (TFPE) không chỉ được xét trong hệ tọa độ Descartes mà còn được xem xét trong hệ tọa độ cực, hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu. Theo hiểu biết của chúng tôi, bài báo này thậm chí là công trình đầu tiên xem xét bài toán ngược không thuần nhất đối với phương trình TFPE trong hệ tọa độ cực. Đặc biệt, bài toán được nghiên cứu trong trường hợp không đối xứng, tức là dữ liệu cho trước f và hàm nguồn q không có tính đối xứng tâm hay đối xứng trục. Ngay cả khi nguồn nhiệt q bị nhiễu, phương pháp vẫn có thể áp dụng hiệu quả. Do đó, những

phân tích nêu trên là điểm mạnh nổi bật của nghiên cứu này so với bài báo [12].

Nhìn chung, nghiệm của bài toán (1.1) không phải lúc nào cũng tồn tại. Ngay cả khi tồn tại, nghiệm cũng không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu tại thời điểm cuối; nghĩa là, chỉ một sai số rất nhỏ trong dữ liệu cũng có thể gây ra sai lệch lớn đối với nghiệm tương ứng (nếu tồn tại). Do đó, việc xây dựng một nghiệm xấp xỉ ổn định cho bài toán — gọi là nghiệm chỉnh hóa — là cần thiết. Để khắc phục tính không ổn định này, chúng tôi đề xuất phương pháp tựa giá trị biên (QBV) nhằm xây dựng nghiệm chỉnh hóa cho bài toán (1.1). Hơn nữa, chúng tôi còn thu được tốc độ hội tụ kiểu Hölder của nghiệm chỉnh hóa.

Sau phần giới thiệu, nội dung tiếp theo của bài báo được trình bày như sau: Một số kiến thức chuẩn bị liên quan đến việc tìm nghiệm chính xác của bài toán (1.1) được trình bày trong Chương 2 và Chương 3. Bằng cách sử dụng phương pháp tựa giá trị biên (QBV), chúng tôi xây dựng nghiệm chỉnh hóa và đưa ra ước lượng sai số dưới giả thiết tiên nghiệm trong Chương 4. Cuối cùng, một ví dụ số được trình bày trong

Chương 5 nhằm minh họa tính hiệu quả của phương pháp đề xuất. Tổng kết các kết quả chính của bài báo được nêu trong Chương 6.

2. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số định nghĩa và bổ đề hữu ích, giữ vai trò then chốt trong việc phân tích và chứng minh các kết quả chính ở các phần tiếp theo.

Định nghĩa 2.1 ([9]) Cho $p \geq 0$, khi đó, ta có hàm Bessel loại 1 cấp p như sau

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}, \text{ với } x \in \mathbb{R},$$

trong đó, Γ là hàm Gamma, nghĩa là

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \text{ với } z \in \mathbb{C}.$$

Khi $p = m$, với m là một số nguyên không âm. Khi đó, ta có hàm Bessel loại 1 cấp m như sau

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Bổ đề 2.1 ([9]) Giả sử rằng $f(r, \theta)$ được xác định trên miền $\Omega = (0, a) \times (0, 2\pi)$. Khi đó, hàm $f(r, \theta)$ có thể được khai triển dưới dạng chuỗi Bessel như sau

$$f(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (a_{mn}[f] \cos m\theta + b_{mn}[f] \sin m\theta),$$

trong đó, các hệ số khai triển được xác định bởi

$$a_{mn}[f] = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos(m\theta) J_m(\lambda_{mn} r) r d\theta dr, \quad (2.1)$$

$$b_{mn}[f] = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin(m\theta) J_m(\lambda_{mn} r) r d\theta dr, \quad (2.2)$$

với $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$, α_{mn} là nghiệm dương thứ n của hàm Bessel J_m .

Định nghĩa 2.2 ([9]) Cho miền $\Omega = (0, a) \times (0, 2\pi)$, ta định nghĩa không gian $L^2(\Omega)$ như sau

$$L^2(\Omega) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ là hàm đo Lebesgue} \}.$$

Nếu một hàm $f(r, \theta)$ có thể được khai triển thành chuỗi Bessel dưới dạng

$$f(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (a_{mn}[f] \cos m\theta + b_{mn}[f] \sin m\theta),$$

thì không gian $L^2(\Omega)$ này là một không gian Hilbert, với chuẩn được xác định bởi

$$\| f \|_2^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn}^2[f] + b_{mn}^2[f]).$$

Định nghĩa 2.3 ([8]) Hàm Mittag-Leffler được định nghĩa bởi

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

trong đó, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}$ là các hằng số tùy ý, và Γ là hàm gamma.

Bổ đề 2.2 Giả sử rằng $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$. Khi đó tồn tại các hằng số $C_0, C_1 > 0$ chỉ phụ thuộc vào α_0, α_1 sao cho

$$\frac{C_0}{(1-s)\Gamma(1-\alpha)} \leq E_{\alpha,1}(s) \leq \frac{C_1}{(1-s)\Gamma(1-\alpha)}, \quad \forall s \leq 0.$$

Bổ đề 2.2 Giả sử rằng $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$. Khi đó tồn tại các hằng số $C_0, C_1 > 0$ chỉ phụ thuộc vào α_0, α_1 sao cho

$$\frac{C_0}{(1-s)\Gamma(1-\alpha)} \leq E_{\alpha,1}(s) \leq \frac{C_1}{(1-s)\Gamma(1-\alpha)}, \quad \forall s \leq 0.$$

Bổ đề 2.3 Cho $\lambda > 0, \alpha > 0$, ta có

$$\text{i. } \frac{d}{dt} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha), \quad t > 0.$$

$$\text{ii. } D_t^\alpha E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha), \quad t > 0, \text{ trong đó, } D_t^\alpha \text{ là đạo hàm Caputo cấp } \alpha.$$

Bổ đề 2.4 Nếu $D_t^\alpha f(t)$ là đạo hàm Caputo cấp α của $f(t)$ với $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$, và $f(t)$ có đạo hàm liên tục đến bậc n trên $[0; \infty)$, thì ta có

$$\mathbf{L}[D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathbf{L}(f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Bổ đề 2.5 Với $\lambda > 0, \beta > 0$ và $\alpha \in (0,1)$, tồn tại các hằng số $C_0, C_1 > 0$ sao cho

$$\frac{E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha)} \leq \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \beta^{\frac{t-T}{T}}, \text{ với } 0 < t < T.$$

Chứng minh:

Áp dụng Bổ đề 2.2 và bất đẳng thức Young cho hai số dương $\beta^{\frac{T-t}{T}}, (E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha))^{\frac{t}{T}}$, với các hệ số $\frac{T}{T-t}, \frac{T}{t}$, ta có

$$\begin{aligned} \beta + E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha) &\geq \frac{T-t}{T} \beta + \frac{t}{T} E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha) \\ &\geq \beta^{\frac{T-t}{T}} (E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha))^{\frac{t}{T}} \\ &\geq \beta^{\frac{T-t}{T}} \left(\frac{C_0}{(1+\lambda T^\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha)} &\leq \beta^{\frac{t-T}{T}} \frac{\frac{C_1}{(1+\lambda t^\alpha)\Gamma(1-\alpha)}}{\left(\frac{C_0}{(1+\lambda T^\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{t}{T}}} \\ &\leq \beta^{\frac{t-T}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \frac{(1+\lambda T^\alpha)^{\frac{t}{T}}}{(1+\lambda t^\alpha)} \\ &\leq \beta^{\frac{t-T}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \frac{1+\lambda \frac{t}{T} T^\alpha}{1+\lambda t^\alpha} \\ &\leq \beta^{\frac{t-T}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \frac{1+\lambda \frac{t^\alpha}{T^\alpha} T^\alpha}{1+\lambda t^\alpha} \\ &= \beta^{\frac{t-T}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}}. \end{aligned}$$

Ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 2.5.

3. Bài toán ngược cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian trong hệ tọa độ cực

Trước tiên, bổ đề sau đây sẽ giúp tìm nghiệm của bài toán (1.1).

Bổ đề 3.1 Nếu nghiệm của bài toán (1.1) tồn tại, thì nó được cho bởi

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) u_{mn}(\theta, t), \quad (3.1)$$

trong đó

$$u_{mn}(\theta, t) = A_{mn}[f, q](t) \cos m\theta + B_{mn}[f, q](t) \sin m\theta, \quad (3.2)$$

với

$$A_{mn}[f, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \left(a_{mn}[f] - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (T-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds \right) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds, \quad (3.3)$$

$$B_{mn}[f, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \left(b_{mn}[f] - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (T-s)^\alpha) b_{mn}[q] ds \right) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) b_{mn}[q] ds, \quad (3.4)$$

ở đây, các hệ số $a_{mn}[f]$, $a_{mn}[q]$ và $b_{mn}[f]$, $b_{mn}[q]$ được tính theo (2.1) và (2.2).

Chứng minh: Xét bài toán giá trị riêng

$$\nabla^2 \psi(r, \theta) = -k\psi(r, \theta) \quad , 0 < r < a, 0 < \theta < 2\pi, \quad (3.5)$$

$$\psi(a, \theta) = 0 \quad , 0 < \theta < 2\pi, \quad (3.6)$$

trong đó, k là một hằng số không âm và $\nabla^2 \psi$ là toán tử Laplace trong hệ tọa độ cực. Hàm ψ bị chặn và tuần hoàn chu kỳ 2π theo biến θ .

Theo [9], bằng cách sử dụng phương pháp tách biến, ta có các hàm riêng của bài toán giá trị riêng (3.5) - (3.6) như sau

$$\psi_{mn}(r, \theta) = J_m(\lambda_{mn} r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta), m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$$

trong đó, $k = k_{mn} = \lambda_{mn}^2$, α_{mn} là nghiệm dương thứ n của J_m .

Giả sử nghiệm chính xác của bài toán (1.1) có dạng khai triển theo các hàm riêng của bài toán (3.5) - (3.6) như sau

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (A_{mn}(t) \cos m\theta + B_{mn}(t) \sin m\theta), \quad (3.7)$$

trong đó, các hệ số $a_{mn}[f], a_{mn}[q]$ và $b_{mn}[f], b_{mn}[q]$ là các hàm theo t . Dựa theo khai triển Bessel (Bổ đề 2.1), các hàm f và q có thể được biểu diễn như sau

$$u(r, \theta, T) = f(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (a_{mn}[f] \cos m\theta + b_{mn}[f] \sin m\theta),$$

và

$$q(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) (a_{mn}[q] \cos m\theta + b_{mn}[q] \sin m\theta), \quad (3.8)$$

trong đó, $a_{mn}[f], a_{mn}[q]$ và $b_{mn}[f], b_{mn}[q]$ được xác định bởi (2.1) và (2.2).

Thay biểu thức của u từ (3.7) vào phương trình nhiệt (1.1), ta thu được

$$\begin{aligned} D_t^\alpha A_{mn}(t) &= -c^2 \lambda_{mn}^2 A_{mn}(t) + a_{mn}[q], & A_{mn}(T) &= a_{mn}[f], \\ D_t^\alpha B_{mn}(t) &= -c^2 \lambda_{mn}^2 B_{mn}(t) + b_{mn}[q], & B_{mn}(T) &= b_{mn}[f]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace cho phương trình (3.9) ta có

$$s^\alpha L\{A_{mn}(t)\}(s) - s^{\alpha-1} A_{mn}(0) = -c^2 \lambda_{mn}^2 L\{A_{mn}(t)\}(s) + L(a_{mn}[q])(s),$$

suy ra

$$L\{A_{mn}(t)\}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + c^2 \lambda_{mn}^2} A_{mn}(0) + \frac{1}{s^\alpha + c^2 \lambda_{mn}^2} L(a_{mn}[q])(s).$$

Biến đổi Laplace ngược, ta có

$$A_{mn}(t) = E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha) A_{mn}(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds, \quad (3.10)$$

$$A_{mn}(T) = E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha) A_{mn}(0) + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (T-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds.$$

Suy ra

$$A_{mn}(0) = \frac{A_{mn}(T) - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (T-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)}.$$

Do đó, nghiệm $A_{mn}(t)$ có dạng

$$A_{mn}(t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \left(a_{mn}[f] - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (T-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds \right) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) a_{mn}[q] ds.$$

Tương tự, ta tìm được nghiệm cho $B_{mn}(t)$

$$B_{mn}(t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \left(b_{mn}[f] - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (T-s)^\alpha) b_{mn}[q] ds \right) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) b_{mn}[q] ds.$$

Do đó, nghiệm chính xác của bài toán (1.1) có dạng như (3.1), với các hệ số $A_{mn}(t)$, $B_{mn}(t)$ như trong (3.3) và (3.4).

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 3.2 Cho $q \in L^2(\Omega), t \in (0, T)$. Khi đó, tồn tại một hằng số dương M sao cho

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) ds \right|^2 (a_{mn}^2[q] + b_{mn}^2[q]) \leq M \|q\|_2^2.$$

Phần chứng minh của bổ đề này có thể tham khảo trong chứng minh của **Bổ đề 3.1** trình bày trong bài báo [11].

Tiếp theo, bổ đề cuối cùng trong phần này sẽ chỉ ra tính ổn định có điều kiện của bài toán (1.1).

Bổ đề 3.3 Giả sử $f, q \in L^2(\Omega)$, và

nghiệm $u(\cdot, \cdot, t)$ của bài toán thỏa mãn $u(\cdot, \cdot, 0) \in L^2(\Omega)$, tức là tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho

$$\|u(\cdot, \cdot, 0)\|_2 \leq K. \tag{3.11}$$

Khi đó, với mọi $t \in (0, T)$ ta có bất đẳng thức sau

$$\|u(\cdot, \cdot, t)\|_2 \leq \sqrt{2} \left(\frac{KC_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \sqrt{M} \|q\|_2 \right).$$

Chứng minh: Xét hàm $Q_{mn}(t)$, với $t \in (0, T)$, được định nghĩa như sau

$$Q_{mn}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \lambda_{mn}^2 (t-s)^\alpha) ds.$$

Từ công thức khai triển nghiệm (3.1), ta có

$$\|u(\cdot, \cdot, t)\|_2^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn}^2[f, q](t) + B_{mn}^2[f, q](t)),$$

với các hệ số A_{mn}, B_{mn} được biểu diễn dưới dạng

$$A_{mn}[f, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)a_{mn}[q],$$

$$B_{mn}[f, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)b_{mn}[q].$$

Thay vào biểu thức của $\|u(\cdot, \cdot, t)\|_2^2$, ta được

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \cdot, t)\|_2^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)a_{mn}[q] \right]^2 \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)b_{mn}[q] \right]^2 \\ &\leq 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha))^2 \left\{ \left(\frac{(a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q])}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q])}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right\} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}^2(t) (a_{mn}^2[q] + b_{mn}^2[q]). \end{aligned}$$

Áp dụng giả thiết $\|u(\cdot, \cdot, 0)\|_2 \leq K$ và các đánh giá trong *Bổ đề 2.2* và *Bổ đề 3.2*, ta có

$$\|u(\cdot, \cdot, t)\|_2^2 \leq 2 \left(\frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^2 K^2 + 2M \|q\|_2^2,$$

dẫn đến

$$\|u(\cdot, \cdot, t)\|_2 \leq \sqrt{2} \left(\frac{KC_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \sqrt{M} \|q\|_2 \right).$$

Do đó, Bổ đề được chứng minh.

4. Phương pháp tựa giá trị biên sử dụng quy tắc chọn tham số theo giả thiết tiên nghiệm

Trong chương này, chúng tôi trình bày phương pháp **tựa giá trị biên (QBV)** để xây dựng nghiệm chính hóa cho bài toán (1.1), thông qua bài toán sau

$$\begin{cases} D_t^\alpha u^\varepsilon = c^2 \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \theta^2} \right) + q^\varepsilon(r, \theta), & (r, \theta) \in \Omega, t \in (0, T), \\ u^\varepsilon(a, \theta, t) = 0, & \theta \in (0, 2\pi), t \in (0, T), \\ u^\varepsilon(r, \theta, T) + \beta(\varepsilon)u^\varepsilon(r, \theta, 0) = f^\varepsilon(r, \theta), & (r, \theta) \in \Omega, \\ |u^\varepsilon(0, \theta, t)| < \infty, & \theta \in (0, 2\pi), t \in (0, T), \end{cases} \quad (4.1)$$

trong đó, $\beta(\varepsilon)$ là một tham số chính quy hóa, được chọn sao cho $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Để thuận tiện trong trình bày, ta ký

hiệu $\beta = \beta(\varepsilon)$.

Áp dụng phương pháp tách biến, nghiệm $u^\varepsilon(r, \theta, t)$ có dạng

$$u^\varepsilon(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) u_{mn}^\varepsilon(\theta, t), \quad (4.2)$$

trong đó

$$u_{mn}^\varepsilon(\theta, t) = A_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) \cos m\theta + B_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) \sin m\theta, \quad (4.3)$$

các hệ số $A_{mn}^\varepsilon, B_{mn}^\varepsilon$ được xác định theo công thức

$$A_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) = Q_{mn}(t) a_{mn} [q^\varepsilon] + C_{mn} E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha), \quad (4.4)$$

$$B_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) = Q_{mn}(t) b_{mn} [q^\varepsilon] + D_{mn} E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha). \quad (4.5)$$

Từ phương trình biên thứ ba của bài toán (4.1), ta xác định các hệ số C_{mn}, D_{mn} trong (4.4) và (4.5) như sau

$$C_{mn} = \frac{1}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (a_{mn} [f^\varepsilon] - Q_{mn}(T) a_{mn} [q^\varepsilon]),$$

$$D_{mn} = \frac{1}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (b_{mn} [f^\varepsilon] - Q_{mn}(T) b_{mn} [q^\varepsilon]).$$

Thay vào biểu thức của $A_{mn}^\varepsilon, B_{mn}^\varepsilon$, ta thu được

$$A_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (a_{mn} [f^\varepsilon] - Q_{mn}(T) a_{mn} [q^\varepsilon]) + Q_{mn}(t) a_{mn} [q^\varepsilon],$$

$$B_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (b_{mn} [f^\varepsilon] - Q_{mn}(T) b_{mn} [q^\varepsilon]) + Q_{mn}(t) b_{mn} [q^\varepsilon].$$

Trong định lý sau, chúng tôi sẽ đưa ra một ước lượng sai số cho $\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot; t) - u(\cdot, \cdot; t)\|_2$, đồng thời chỉ ra tốc độ hội tụ của nghiệm chính hóa ứng với cách chọn tham số theo một quy tắc tiên nghiệm thích hợp.

Định lý 4.1 Giả sử dữ liệu chính xác

(f, q) và dữ liệu đo nhiễu $(f^\varepsilon, q^\varepsilon)$ thỏa mãn điều kiện (1.2). Giả sử thêm rằng $u(r, \theta, t), u^\varepsilon(r, \theta, t)$, được xác định bởi (3.1) và (4.2), lần lượt là nghiệm chính xác và nghiệm chính hóa của bài toán (1.1). Nếu điều kiện tiên nghiệm (3.11) được

thỏa mãn và $\beta = \sqrt{2M}\varepsilon^{1-m}$, với $m \in (0,1)$, thì ta có bất đẳng thức

$$\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2 \leq \varepsilon^m \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} (1 + 2\sqrt{2M}) + \varepsilon^{(1-m)\frac{t}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} K, \quad (4.6)$$

với mọi $t \in (0, T)$.

Chứng minh: Gọi $v^\varepsilon(r, \theta, t)$, $\omega^\varepsilon(r, \theta, t)$ là các nghiệm chỉnh hóa tương ứng với (f^ε, q) và (f, q) , lần lượt được biểu diễn dưới dạng

$$v^\varepsilon(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r) v_{mn}^\varepsilon(\theta, t), \quad (4.7)$$

$$\omega^\varepsilon(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r) \omega_{mn}^\varepsilon(\theta, t), \quad (4.8)$$

trong đó

$$v_{mn}^\varepsilon(\theta, t) = A_{mn}^\varepsilon[f^\varepsilon, q](t) \cos m\theta + B_{mn}^\varepsilon[f^\varepsilon, q](t) \sin m\theta,$$

$$A_{mn}^\varepsilon[f^\varepsilon, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (a_{mn}[f^\varepsilon] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)a_{mn}[q],$$

$$B_{mn}^\varepsilon[f^\varepsilon, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (b_{mn}[f^\varepsilon] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)b_{mn}[q],$$

$$\omega_{mn}^\varepsilon(\theta, t) = A_{mn}^\varepsilon[f, q](t) \cos m\theta + B_{mn}^\varepsilon[f, q](t) \sin m\theta,$$

$$A_{mn}^\varepsilon[f, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)a_{mn}[q],$$

$$B_{mn}^\varepsilon[f, q](t) = \frac{E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2\lambda_{mn}^2 T^\alpha)} (b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]) + Q_{mn}(t)b_{mn}[q].$$

Ta nhận thấy rằng sai số $\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2$ có thể được phân tách thành ba phần như sau

$$\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2 \leq \|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t)\|_2 + \|v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t)\|_2 + \|\omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2.$$

Từ đó, việc chứng minh định lý này sẽ được chia thành ba bước.

Bước 1: Trước tiên, ta ước lượng $\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t)\|_2$.

Từ (4.2), (4.7) và *Bổ đề 2.2*, ta suy ra

$$\begin{aligned}
 & \left\{ A_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) - A_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q](t) \right\}^2 + \left\{ B_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q^\varepsilon](t) - B_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q](t) \right\}^2 \\
 &= \left\{ \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} Q_{mn}(T) a_{mn} [q - q^\varepsilon] + Q_{mn}(t) a_{mn} [q^\varepsilon - q] \right\}^2 \\
 &+ \left\{ \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} Q_{mn}(T) b_{mn} [q - q^\varepsilon] + Q_{mn}(t) b_{mn} [q^\varepsilon - q] \right\}^2 \\
 &\leq 2 \left(\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 Q_{mn}^2(T) \{ a_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] + b_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] \} \\
 &+ 2 Q_{mn}^2(t) \{ a_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] + b_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] \} \\
 &\leq 2 \left(\frac{C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} \right)^2 Q_{mn}^2(T) \{ a_{mn}^2 [q - q^\varepsilon] + b_{mn}^2 [q - q^\varepsilon] \} \\
 &+ 2 Q_{mn}^2(t) \{ a_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] + b_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] \},
 \end{aligned}$$

trong đó, các hệ số $a_{mn} [q^\varepsilon - q]$ và $b_{mn} [q^\varepsilon - q]$ được xây dựng theo công thức (2.1) và (2.2) tương ứng.

Áp dụng Bổ đề 3.2, ta có

$$\begin{aligned}
 & \|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t)\|_2^2 \\
 &\leq 2 \left(\frac{C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} \right)^2 \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=1}^\infty Q_{mn}^2(T) \{ a_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] + b_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] \} \\
 &+ 2 \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=1}^\infty Q_{mn}^2(t) \{ a_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] + b_{mn}^2 [q^\varepsilon - q] \} \\
 &\leq 2 \left(\frac{C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} \right)^2 M \|q^\varepsilon - q\|_2^2 + 2M \|q^\varepsilon - q\|_2^2 \\
 &\leq 2M \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^2 \left(\frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^2 + 2M \varepsilon^2. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Vậy ta đã ước lượng được $\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t)\|_2$.

Bước 2: Ta ước lượng $\|v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t)\|_2$.

Từ (4.7) và (4.8), ta suy ra

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q](t) - A_{mn}^\varepsilon [f, q](t) \right\}^2 + \left\{ B_{mn}^\varepsilon [f^\varepsilon, q](t) - B_{mn}^\varepsilon [f, q](t) \right\}^2 \\ &= \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn} t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn} T^\alpha)} \right]^2 \left\{ a_{mn}^2 [f^\varepsilon - f] + b_{mn}^2 [f^\varepsilon - f] \right\} \\ &\leq \left(\frac{C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} \right)^2 \left\{ a_{mn}^2 [f^\varepsilon - f] + b_{mn}^2 [f^\varepsilon - f] \right\}, \end{aligned}$$

trong đó, $a_{mn}^2 [f^\varepsilon - f], b_{mn}^2 [f^\varepsilon - f]$ được xác định theo (2.1) và (2.2) tương ứng.

Do đó, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} & \left\| v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) \right\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn}^2 [f^\varepsilon - f] + b_{mn}^2 [f^\varepsilon - f] \right\} \\ &\leq \left(\frac{C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} \right)^2 \left\| f^\varepsilon - f \right\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^2 \left(\frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^2. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Vậy ta đã ước lượng được $\left\| v^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) \right\|_2$.

Bước 3: Ta ước lượng $\left\| \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t) \right\|_2$.

Từ (3.1), (4.8) và Bổ đề 2.5, ta được

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{mn}^\varepsilon [f, q](t) - A_{mn} [f, q](t) \right\}^2 + \left\{ B_{mn}^\varepsilon [f, q](t) - B_{mn} [f, q](t) \right\}^2 \\ &= \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} - \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \left(a_{mn} [f] - Q_{mn}(T) a_{mn} [q] \right)^2 \\ &+ \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} - \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \left(b_{mn} [f] - Q_{mn}(T) b_{mn} [q] \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta^2 \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \\
 &\quad + \beta^2 \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \\
 &\leq \beta^{\frac{2t}{T}} \left(\frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \right)^2 \times \left\{ \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 + \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
 &\| \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t) \|_2^2 \\
 &\leq \beta^{\frac{2t}{T}} \left(\frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \right)^2 \\
 &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 + \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right\} \\
 &= \beta^{\frac{2t}{T}} \left(\frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \right)^2 \| u(\cdot, \cdot, 0) \|_2^2 \\
 &\leq \beta^{\frac{2t}{T}} \left(\frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} \right)^2 K^2. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Kết hợp các đánh giá (4.9), (4.10) và (4.11), ta có

$$\begin{aligned}
 &\| u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t) \|_2 \\
 &\leq \sqrt{2M} \frac{\varepsilon}{\beta \Gamma(1-\alpha)} C_1 + \sqrt{2M} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\beta \Gamma(1-\alpha)} C_1 + \beta^{\frac{t}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} K.
 \end{aligned}$$

Nếu chọn $\beta = \sqrt{2M} \varepsilon^{1-m}$, với $m \in (0;1)$, ta được

$$\| u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t) \|_2$$

$$\leq \varepsilon^m \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} (1+2\sqrt{2M}) + \varepsilon^{(1-m)\frac{t}{T}} \frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} K.$$

Kết thúc chứng minh Định lý 4.1.

Nhận xét 4.2 Ước lượng (4.6) cho thấy rằng phương pháp tựa giá trị biên (QBV) có thể hữu ích trong việc xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định cho bài toán (1.1). Tuy nhiên, từ (4.6), ta thấy rằng khi $t \rightarrow 0$, độ chính xác của nghiệm xấp xỉ bị suy giảm. Tại thời điểm $t = 0$, ước lượng chỉ cho thấy rằng sai số bị chặn bởi

$$\frac{C_1}{(C_0)^{\frac{t}{T}} (\Gamma(1-\alpha))^{\frac{T-t}{T}}} K, \text{ điều này có nghĩa là}$$

sự hội tụ của nghiệm chính hóa tại thời điểm $t = 0$ vẫn chưa được chứng minh về mặt lý thuyết. Để khắc phục hạn chế này, ta cần một điều kiện tiên nghiệm mạnh hơn điều kiện (3.11), như sau

$$\beta = \left(\frac{C_0}{\left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) \Gamma(1-\alpha) K} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{1-m}, \text{ với } m \in (0,1),$$

trong đó, $\lambda_{0,1} = \frac{\alpha_{0,1}}{a}$, $\alpha_{0,1}$ là nghiệm dương nhỏ nhất của J_0 , thì ta có

$$\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2 \leq \varepsilon^{\min\{m, 1-m\}} \left[\left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) K C_1^2}{C_0 \Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2M} + 2) + \sqrt{2M} \right], \quad (4.13)$$

với mọi $t \in [0, T]$.

Chứng minh:

Từ chứng minh của Định lý 4.1, ta có

$$\|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2 \leq \frac{\varepsilon \sqrt{2M} C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} + \sqrt{2M} \varepsilon + \frac{\varepsilon C_1}{\beta \Gamma(1-\alpha)} + \|\omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2. \quad (4.14)$$

Vì vậy, trong định lý này, ta chỉ cần ước lượng hạng tử thứ ba $\|\omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2$ trong công thức (4.14).

Từ (3.1), (4.8) và Bổ đề 2.2, ta thu được

$$\left\{ A_{mm}^\varepsilon[f, q](t) - A_{mm}[f, q](t) \right\}^2 + \left\{ B_{mm}^\varepsilon[f, q](t) - B_{mm}[f, q](t) \right\}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta^2 \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \\
 &\quad + \beta^2 \left[\frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 t^\alpha)}{\beta + E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \\
 &\leq \beta^2 \left(\frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^2 \left[\frac{1}{\lambda_{mn}^2 E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right]^2 \\
 &\quad \times \lambda_{mn}^4 \left\{ \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 + \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right\} \\
 &\leq \beta^2 \left(\frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^2 \left[\frac{1}{\frac{\lambda_{mn}^2}{(1+c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \Gamma(1-\alpha)} \right]^2 \times \lambda_{mn}^4 \left\{ \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 + \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right\} \\
 &\leq \beta^2 \left(\frac{C_1}{C_0} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right)^2 \times \lambda_{mn}^4 \left\{ \left(\frac{a_{mn}[f] - Q_{mn}(T)a_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 + \left(\frac{b_{mn}[f] - Q_{mn}(T)b_{mn}[q]}{E_{\alpha,1}(-c^2 \lambda_{mn}^2 T^\alpha)} \right)^2 \right\},
 \end{aligned}$$

trong đó, $\lambda_{0,1} = \frac{\alpha_{0,1}}{a}$, $\alpha_{0,1}$ là nghiệm dương nhỏ nhất của J_0 .

Từ đó, ta suy ra

$$\left\| \omega^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t) \right\|_2^2 \leq \beta^2 \left(\frac{C_1}{C_0} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right)^2 K^2.$$

Suy ra

$$\left\| u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t) \right\|_2 \leq \sqrt{2M} \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \sqrt{2M} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \beta \frac{C_1}{C_0} \left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) K. \quad (4.15)$$

Bằng cách chọn

$$\beta = \left(\frac{C_0}{\left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) \Gamma(1-\alpha) K} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{1-m}, \text{ với } m \in (0,1),$$

thì ước lượng (4.15) trở thành

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2 &\leq \varepsilon^m \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) KC_1^2}{C_0 \Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2M} + 1) + \sqrt{2M} \varepsilon + \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) KC_1^2}{C_0 \Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{1-m} \\ &\leq \varepsilon^{\min\{m, 1-m\}} \left[\left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) KC_1^2}{C_0 \Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2M} + 2) + \sqrt{2M} \right]. \end{aligned}$$

Điều này hoàn tất chứng minh của Định lý 4.3.

Nhận xét 4.4 Công thức (4.13) cho thấy rằng sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa tại thời điểm $t=0$ đã được chứng minh về mặt lý thuyết. Do đó, chúng ta đã khắc phục khó khăn được nêu

ra trong *Nhận xét 4.2*.

Nhận xét 4.5 Trong thực tế, điều kiện tiên nghiệm (4.12) thường không được biết trước. Trong trường hợp này, với *Định lý 4.3*, ta chọn $\beta = \varepsilon^{1-m}$, với $m \in (0, 1)$, khi đó ta thu được ước lượng

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\|_2 &\leq \sqrt{2M} \varepsilon^m \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \sqrt{2M} \varepsilon + \varepsilon^m \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \varepsilon^{1-m} \frac{C_1}{C_0} \left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) K \\ &\leq \varepsilon^{\min\{m, 1-m\}} \left((\sqrt{2M} + 1) \frac{C_1}{\Gamma(1-\alpha)} + \sqrt{2M} + \frac{C_1}{C_0} \left(\frac{1}{\lambda_{0,1}^2} + T^\alpha \right) K \right). \end{aligned}$$

5. Ví dụ số

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán cụ thể sau

$$D_t^\alpha u_t = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + q(r, \theta), \quad 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi, 0 < t < 1, \quad (5.1)$$

$$u(1, \theta, t) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < t < 1, \quad (5.2)$$

$$u(r, \theta, 1) = f(r, \theta), \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < r < 1, \quad (5.3)$$

$$|u(0, \theta, t)| < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < t < 1, \quad (5.4)$$

trong đó, $\alpha = \frac{1}{2}, c = 10^{-1}$ và

$$q(r, \theta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (1-r^2) r^2 \sin 2\theta, f(r, \theta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (1-r^2) r \sin \theta. \quad (5.5)$$

Do đó, chúng ta có được

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) u_{mn}(\theta, t),$$

trong đó

$$a_{mn}[f] = 0 \text{ với } m = 0, 1, \dots \text{ và } n = 1, 2, \dots$$

$$b_{1n}[f] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{16}{\alpha_{1n}^3 J_2(\alpha_{1n})} \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

$$b_{mn}[f] = 0 \text{ với } m \neq 1 \text{ và } n = 1, 2, \dots$$

$$a_{mn}[q] = 0 \text{ với } m = 0, 1, \dots \text{ và } n = 1, 2, \dots$$

$$b_{2n}[q] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{24}{\alpha_{2n}^3 J_3(\alpha_{2n})} \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

$$b_{mn}[q] = 0 \text{ với } m \neq 2 \text{ và } n = 1, 2, \dots$$

Từ đó, chúng tôi thu được nghiệm chính xác của bài toán (5.1)–(5.4) tương ứng với dữ liệu chính xác (f, g) như sau

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{1n}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{1n}^2 T^\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{16 \sin \theta}{\alpha_{1n}^3 J_2(\alpha_{1n})} J_1(\alpha_{1n} r) \\ &+ J_2(\alpha_{2n} r) \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \alpha_{2n}^2 (t-s)^\alpha) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{24 \sin 2\theta}{c^2 \alpha_{2n}^5 J_3(\alpha_{2n})} ds \right. \\ &\left. - \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 T^\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^2 \alpha_{2n}^2 (T-s)^\alpha) \frac{24 \sin 2\theta}{c^2 \alpha_{2n}^5 J_3(\alpha_{2n})} ds \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{1n}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{1n}^2 T^\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{16 \sin \theta}{\alpha_{1n}^3 J_2(\alpha_{1n})} J_1(\alpha_{1n} r) \\ &+ J_2(\alpha_{2n} r) \left(\frac{1}{c^2 \alpha_{2n}^2} (1 - E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 t^\alpha)) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{24 \sin 2\theta}{c^2 \alpha_{2n}^5 J_3(\alpha_{2n})} \right. \\ &\left. - \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 t^\alpha)}{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 T^\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{c^2 \alpha_{2n}^2} (1 - E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 T^\alpha)) \frac{24 \sin 2\theta}{c^2 \alpha_{2n}^5 J_3(\alpha_{2n})} \right). \quad (5.6) \end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi xét cặp dữ liệu đo nhiễu $(f^\varepsilon, q^\varepsilon)$ sau đây

$$q^\varepsilon(r, \theta) = (1 + \varepsilon \text{rand}(\cdot)) q(r, \theta), \quad f^\varepsilon(r, \theta) = (1 + \varepsilon \text{rand}(\cdot)) f(r, \theta), \quad (5.7)$$

với $\text{rand}(\cdot) \sim N(0,1)$. Từ (5.5) và (5.7), dễ dàng nhận thấy rằng $\|f^\varepsilon - f\|_2 \leq \varepsilon$, $\|q^\varepsilon - q\|_2 \leq \varepsilon$. Từ (4.2) và chọn $m = \frac{1}{2}$, chúng tôi thu được nghiệm

$$u^\varepsilon(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{1n}^2 t^\alpha)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} + E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{1n}^2 T^\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{16(1 + \varepsilon \text{rand}(\cdot)) \sin \theta}{\alpha_{1n}^3 J_2(\alpha_{1n})} J_1(\alpha_{1n} r) + J_2(\alpha_{2n} r) \left(\frac{1}{c^2 \alpha_{2n}^2} (1 - E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 t^\alpha)) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{24(1 + \varepsilon \text{rand}(\cdot)) \sin 2\theta}{c^2 \alpha_{2n}^5 J_3(\alpha_{2n})} - \frac{E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 t^\alpha)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} + E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 T^\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{c^2 \alpha_{2n}^2} (1 - E_{\alpha,1}(-c^2 \alpha_{2n}^2 T^\alpha)) \frac{24 \sin 2\theta}{c^2 \alpha_{2n}^5 J_3(\alpha_{2n})} \right). \quad (5.8)$$

Với sự hỗ trợ của các chương trình tính toán, chúng tôi đã thu được các kết quả xấp xỉ cho năm hệ số đầu tiên trong (5.6) và (5.8) tại một số giá trị của t . Từ đó, chúng tôi tiến hành tính toán sai số giữa nghiệm chính xác và các nghiệm

chỉnh hóa của bài toán (5.1)–(5.4) tương ứng với cặp dữ liệu nhiễu $(f^\varepsilon, q^\varepsilon)$ được xác định như sau

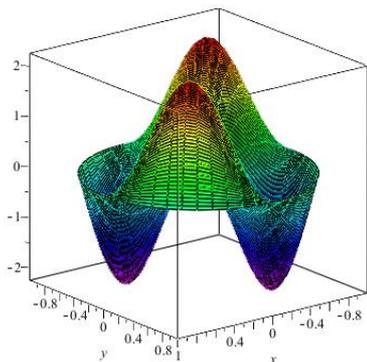
chỉnh hóa tương ứng với các mức nhiễu $\varepsilon_1 = 10^{-1}, \varepsilon_2 = 10^{-2}, \varepsilon_3 = 10^{-3}, \varepsilon_4 = 10^{-4}$, trong đó $t \in \{0; 0.5\}$. Bảng dưới đây trình bày sai số tương ứng trong các trường hợp nêu trên.

Bảng 1: Ước lượng sai số giữa nghiệm chính xác và các nghiệm chỉnh hóa

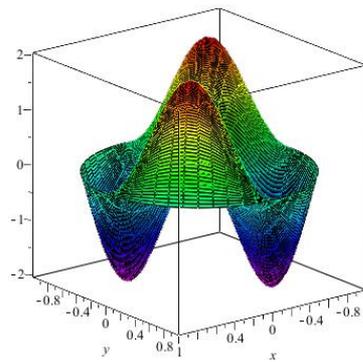
	$\ u^\varepsilon(\cdot, \cdot, t) - u(\cdot, \cdot, t)\ _2$			
t	$\varepsilon_1 = 10^{-1}$	$\varepsilon_2 = 10^{-2}$	$\varepsilon_3 = 10^{-3}$	$\varepsilon_4 = 10^{-4}$
0	4.2342×10^{-1}	3.5348×10^{-1}	5.7586×10^{-2}	2.3261×10^{-2}
0.5	3.3042×10^{-1}	1.3875×10^{-1}	4.9050×10^{-2}	1.6082×10^{-2}

Chúng tôi trình bày các đồ thị của nghiệm chính xác $u(r, \theta, t)$ và các nghiệm chỉnh hóa $u^{\varepsilon_i}(r, \theta, t), i = \overline{1..4}$ (Hình 1–5) tại $t = 0.5$. Cuối cùng, Hình 6 minh họa sự

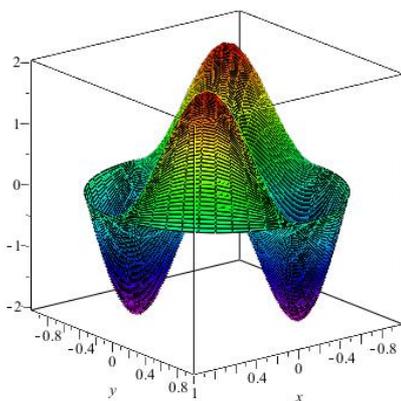
so sánh giữa nghiệm chính xác và các nghiệm chỉnh hóa $u^{\varepsilon_i}(r, \theta, t), i = \overline{1..4}$ tại $r = 0.5, t = 0.5$ trong hệ tọa độ cực.



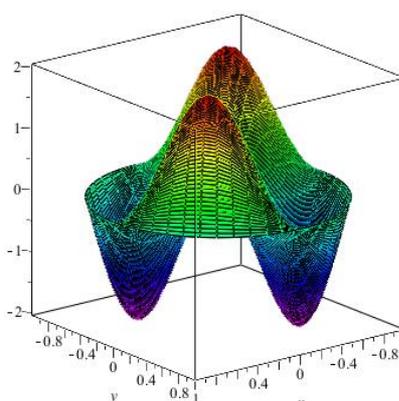
Hình 1: Nghiệm chính xác



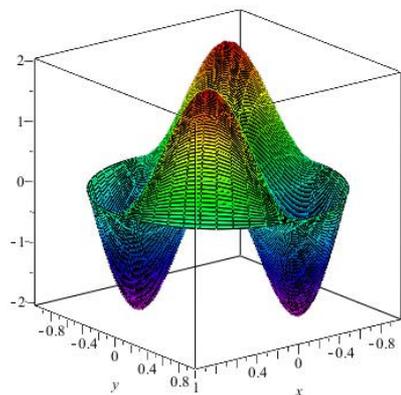
Hình 2: Nghiệm chỉnh hóa với $\epsilon_1 = 10^{-1}$.



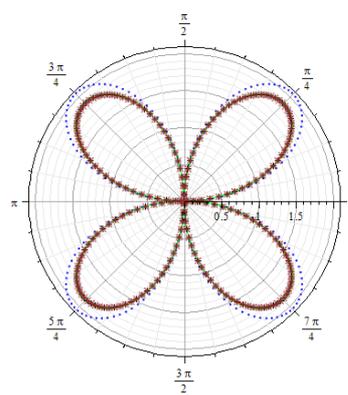
Hình 3: Nghiệm chỉnh hóa với $\epsilon_2 = 10^{-2}$.



Hình 4: Nghiệm chỉnh hóa với $\epsilon_3 = 10^{-3}$.



Hình 5: Nghiệm chỉnh hóa với $\epsilon_4 = 10^{-4}$.



— Nghiệm chính xác.	■ Nghiệm chỉnh hóa tương ứng với ϵ_1 .
— Nghiệm chỉnh hóa tương ứng với ϵ_2 .	+ Nghiệm chỉnh hóa tương ứng với ϵ_3 .
× Nghiệm chỉnh hóa tương ứng với ϵ_4 .	

Hình 6: Nghiệm chính xác và các nghiệm chỉnh hóa tương ứng với $\epsilon_i, i = 1...4$ trong trường hợp $r = 0.5, t = 0.5$ trong hệ tọa độ cực

6. Kết luận

Trong bài báo này, bằng cách áp dụng phương pháp tựa giá trị biên (QBV), chúng tôi đã xem xét một bài toán ngược cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian không thuần nhất trong hệ tọa độ cực, nhằm phục hồi trạng thái ban đầu của một quá trình khuếch tán chậm từ trạng thái hiện tại. Theo hiểu biết của chúng tôi, đây là nghiên cứu đầu tiên về

vấn đề này. Về mặt lý thuyết, chúng tôi đã thu được các ước lượng sai số kiểu Hölder dựa trên quy tắc chọn tham số tiên nghiệm và các điều kiện tiên nghiệm. Hơn nữa, các ví dụ số cho thấy nghiệm chính xác được đề xuất hội tụ về nghiệm chính xác. Sau nghiên cứu này, chúng tôi mong muốn tiếp tục khảo sát các bài toán ngược cho phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian trong hệ tọa độ trụ hoặc cầu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, A.A. Firsov, Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films, *Science*, 306 (2004) 666-669.
- [2] J.-H. Yang, Y. Zhang, W.-J. Yin, X.G. Gong, B.I. Yakobson, S.-H. Wei, Two-Dimensional SiS Layers with Promising Electronic and Optoelectronic Properties: Theoretical Prediction, *Nano Letters*, 16 (2016) 1110-1117.
- [3] Z. Zhu, J. Guan, D. Liu, D. Tománek, Designing Isoelectronic Counterparts to Layered Group V Semiconductors, *ACS Nano*, 9 (2015) 8284-8290.
- [4] J.-H. Yang, Q. Yuan, H. Deng, S.-H. Wei, B.I. Yakobson, Earth-Abundant and Non-Toxic SiX (X = S, Se) Monolayers as Highly Efficient Thermoelectric Materials, *The Journal of Physical Chemistry C*, 121 (2017) 123-128.
- [5] T. Jing, D. Liang, M. Deng, S. Cai, Two-dimensional IV–VI materials with in-plane negative Poisson's ratio and anisotropic carrier mobility, *Journal of Materials Chemistry C*, 8 (2020) 10382-10389.
- [6] N.T. Hiep, C.Q. Nguyen, N.N. Hieu, Negative Poisson's ratio and anisotropic carrier mobility in ternary Janus Si₂XY (X/Y = S, Se, Te): First-principles prediction, *Applied Physics Letters*, 123 (2023) 092102.
- [7] J. Zhang, S. Jia, I. Kholmanov, L. Dong, D. Er, W. Chen, H. Guo, Z. Jin, V.B. Shenoy, L. Shi, J. Lou, Janus Monolayer Transition-Metal Dichalcogenides, *ACS Nano*, 11 (2017) 8192-8198.
- [8] T.V. Vu, H.V. Phuc, A.I. Kartamyshev, N.N. Hieu, Enhanced out-of-plane piezoelectricity and carrier mobility in Janus γ -Sn₂XY (X/Y = S, Se, Te) monolayers: A first-principles prediction, *Applied Physics Letters*, 122 (2023) 061601
- [9] T.V. Vu, N.T. Hiep, H.V. Phuc, B.D. Hoi, A.I. Kartamyshev, N.N. Hieu, Raman response, piezoelectricity, and transport properties of the two-dimensional JanusHfSiX₃H (X = N/P/As) semiconductors: A first-principles study, *Physical Review B*, 110 (2024) 235403.

- [10] G. Kresse, J. Furthmüller, Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set, *Physical Review B*, 54 (1996) 11169-11186.
- [11] G. Kresse, J. Furthmüller, Efficiency of ab-initio total energy calculations for metals and semiconductors using a plane-wave basis set, *Computational Materials Science*, 6 (1996) 15-50.
- [12] J.P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof, Generalized Gradient Approximation Made Simple, *Physical Review Letters*, 77 (1996) 3865-3868.
- [13] J. Heyd, G.E. Scuseria, M. Ernzerhof, Hybrid functionals based on a screened Coulomb potential, *The Journal of Chemical Physics*, 118 (2003) 8207-8215.
- [14] H.J. Monkhorst, J.D. Pack, Special points for Brillouin-zone integrations, *Physical Review B*, 13 (1976) 5188-5192.
- [15] J. Bardeen, W. Shockley, Deformation Potentials and Mobilities in Non-Polar Crystals, *Physical Review*, 80 (1950) 72-80.
- [16] W. Fang, H. Wei, X. Xiao, Y. Chen, M. Li, Y. He, Monolayer SnX (X = O, S, Se): Two-Dimensional Materials with Low Lattice Thermal Conductivities and High Thermoelectric Figures of Merit, *ACS Applied Energy Materials*, 5 (2022) 7802-7812.
- [17] N.T. Hung, A.R.T. Nugraha, R. Saito, Two-dimensional MoS₂ electromechanical actuators, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 51 (2018) 075306.

Ngày nhận bài: 11/5/2025

Ngày chấp nhận đăng: 10/6/2025