TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
**TẠP CHÍ KHOA HỌC**
**ĐẠI HỌC SÀI GÒN**
ISSN 1859 - 3208
Số 89, Tập 02/2023

SAIGON UNIVERSITY
**SCIENTIFIC JOURNAL**
**OF SAIGON UNIVERSITY**
No. 89, Vol 02/2023

*Email: tcdhsg@sgu.edu.vn ; Website: http://sj.sgu.edu.vn/*

# MỘT NGHIÊN CỨU TRI THỨC LUẬN LỊCH SỬ NHÓM ĐƠN HỮU HẠN TRONG ĐẠI SỐ TRỪU TƯỢNG

## *A historical epistemological study of finite simple groups in abstract algebra*

Nguyễn Thị Vân Khánh
Trường ĐH Sài Gòn

**TÓM TẮT**

Nhóm đơn hữu hạn là nhóm có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán học nói chung và đại số nói riêng. Đặc biệt hơn nữa, các nhóm đơn hữu hạn đã được phân loại hoàn toàn nhờ *"Định lý đặc trưng"*. Trong lý thuyết nhóm hữu hạn, nhóm đơn đóng vai trò là *"các khối xây dựng cơ bản"*, được xem là các yếu tố cấu thành nhóm hữu hạn. Bài báo này trình bày một nghiên cứu tri thức luận lịch sử để xác định các đặc trưng tri thức luận và các chướng ngại tri thức luận khái niệm nhóm đơn hữu hạn.

***Từ khóa:*** *nhóm đơn hữu hạn, tri thức luận lịch sử, đặc trưng tri thức luận, chướng ngại tri thức luận.*

**ABSTRACT**

A finite simple group is an especially important group of mathematics in general and algebra in particular. More specifically, the finite simple groups have been completely classified by *"The Classification Theorem"*. In finite group theory, simple groups play a significant role in the *"basic building blocks"* that are the constitutive elements of a finite group. This paper presents a historical epistemological study of finite simple groups to determine their epistemological characteristics and epistemological obstacles.

***Keywords:*** *finite simple group, historical epistemology, epistemological characteristic, epistemological obstacle.*

## 1. Đặt vấn đề

### *1.1. Vai trò của khái niệm nhóm đơn hữu hạn trong đại số trừu tượng*

Trong lý thuyết nhóm hữu hạn của đại số trừu tượng, nhóm đơn rất quan trọng vì nó đóng vai trò là *"các khối xây dựng cơ bản"*, tương tự như vai trò của các số nguyên tố trong lý thuyết số, những khối xây dựng cơ bản này được xem là các yếu tố cấu thành cấu trúc của nhóm hữu hạn. Trong những năm đầu thế kỷ 20, việc thừa nhận tầm quan trọng của nhóm đơn đã truyền cảm hứng cho nhiều nhà toán học trên thế giới tìm ra tất cả các nhóm đơn hữu hạn dựa theo số phần tử của nhóm.

Việc phân loại cấu trúc và tìm ra toàn bộ nhóm đơn hữu hạn được hoàn thành vào năm 1996. Theo đó, định nghĩa nhóm đơn hữu hạn có thể thay thế bằng Định lý đặc trưng (Định lý phân loại), định lý này có ý nghĩa như sự phân loại nhóm đơn hữu hạn dựa theo cấu trúc và số phần tử của nhóm.

Tác giả liên hệ: ntvkhanh@sgu.edu.vn

***1.2. Sự cần thiết của phân tích tri thức luận lịch sử***

Theo [1]: Phân tích tri thức luận một tri thức là nghiên cứu lịch sử hình thành tri thức nhằm làm rõ:

- Nghĩa của tri thức, những bài toán, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết;
- Những trở ngại cho sự hình thành tri thức;
- Những điều kiện sản sinh ra tri thức, những bước nhảy cần thiết trong quan niệm để thúc đẩy quá trình hình thành và phát triển tri thức.

Phân tích tri thức luận lịch sử một tri thức là một phân tích quá khứ để khám phá những mò mẫm, những lệch lạc, những chướng ngại khác nhau, những điều kiện cho phép xuất hiện các khái niệm khoa học mới. Trong phân tích tri thức luận lịch sử, điều kiện cho sự nảy sinh một phát minh cũng quan trọng không kém bản thân phát minh đó. Phân tích này giúp ta hiểu đầy đủ hơn sự tiến triển của tri thức, từ đó hiểu rõ hơn các hiện tượng dạy học tri thức đang bàn đến.

**2. Khái niệm nhóm đơn hữu hạn**

Các khái niệm sau được tham khảo và tổng hợp dựa trên tài liệu của [2].

***2.1. Khái niệm nhóm***

Một nhóm được định nghĩa là một tập hợp $G$ cùng với một phép toán hai ngôi có tính kết hợp và được xác định sao cho tồn tại một phần tử đơn vị $e$ trong tập hợp $G$ và nghịch đảo cho mỗi phần tử của tập hợp $G$.

***2.2. Khái niệm nhóm con chuẩn tắc***

Nhóm con chuẩn tắc của nhóm $G$ là nhóm con mà mọi lớp ghép trái và lớp ghép phải của nó bằng nhau.

***2.3. Khái niệm nhóm đơn hữu hạn***

Nhóm không tầm thường $G$ được gọi là nhóm đơn hữu hạn nếu $G$ có hữu hạn phần tử và $G$ chỉ có hai nhóm con chuẩn tắc là nhóm con tầm thường $\{e\}$ và nhóm con không thực sự $G$.

***2.4. Định lý đặc trưng (Định lý phân loại) của nhóm đơn hữu hạn***

Một nhóm hữu hạn là nhóm đơn khi và chỉ khi nó đẳng cấu với 1 trong 43 nhóm đơn sau:

**Bảng 1.** Các nhóm đơn hữu hạn

| Nhóm đơn | Số phần tử ($p$ là số nguyên tố, $q = p^k$) | Tác giả |
|---|---|---|
| $C_p$ | $p$ | Frank Nelson Cole |
| $A_n$ | $\frac{n!}{2}$ | Camille Jordan |
| $PSL_n(q)$ | $\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{gcd(n,q-1)}\prod_{i=2}^{n}(q^i-1)$ | Leonard Eugene Dickson<br>Claude Chevalley |
| $PSU_n(q)$ | $\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{gcd(n,q+1)}\prod_{i=2}^{n}(q^i-(-1)^i)$ | Camille Jordan<br>Claude Chevalley |
| $PSp_{2n}(q)$ | $\frac{q^{n^2}}{gcd(2,q-1)}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)$ | Camille Jordan<br>Claude Chevalley |

| Nhóm đơn | Số phần tử<br>($p$ là số nguyên tố, $q = p^k$) | Tác giả |
|---|---|---|
| $P\Omega_{2n+1}(q)$ | $\frac{q^{n^2}}{gcd(2,q-1)}\prod_{i=1}^{n}\left(q^{2i}-1\right)$ | Camille Jordan<br>Claude Chevalley |
| $G_2(q)$ | $q^6\left(q^2-1\right)\left(q^6-1\right)$ | Claude Chevalley |
| $F_4(q)$ | $q^{24}\left(q^2-1\right)\left(q^6-1\right)\left(q^8-1\right)\left(q^{12}-1\right)$ | Claude Chevalley |
| $E_6(q)$ | $\frac{1}{gcd(3,q-1)}q^{36}\left(q^2-1\right)\left(q^5-1\right)$<br>$\left(q^6-1\right)\left(q^8-1\right)\left(q^9-1\right)\left(q^{12}-1\right)$ | Claude Chevalley |
| $E_7(q)$ | $\frac{1}{gcd(2,q-1)}q^{63}\left(q^2-1\right)\left(q^6-1\right)\left(q^8-1\right)$<br>$\left(q^{10}-1\right)\left(q^{12}-1\right)\left(q^{14}-1\right)\left(q^{18}-1\right)$ | Claude Chevalley |
| $E_8(q)$ | $q^{120}\left(q^2-1\right)\left(q^8-1\right)\left(q^{12}-1\right)\left(q^{14}-1\right)$<br>$\left(q^{18}-1\right)\left(q^{20}-1\right)\left(q^{24}-1\right)\left(q^{30}-1\right)$ | Claude Chevalley |
| ${}^2E_6(q)$ | $\frac{1}{gcd(3,q+1)}q^{36}\left(q^2-1\right)\left(q^5+1\right)$<br>$\left(q^6-1\right)\left(q^8-1\right)\left(q^9+1\right)\left(q^{12}-1\right)$ | Robert Steinberg |
| ${}^3D_4(q)$ | $q^{12}\left(q^2-1\right)\left(q^8+q^4+1\right)\left(q^6-1\right)$ | Robert Steinberg |
| ${}^2B_2(q)$<br>$q = 2^{2n+1}$ | $q^2\left(q-1\right)\left(q^2+1\right)$ | David Ree |
| ${}^2G_2(q)$<br>$q = 3^{2n+1}$ | $q^3\left(q-1\right)\left(q^3+1\right)$ | David Ree |
| ${}^2F_4(q)$<br>$q = 2^{2n+1}$ | $q^{12}\left(q-1\right)\left(q^3+1\right)\left(q^4-1\right)\left(q^6+1\right)$ | David Ree |
| ${}^2F_4(2)'$ | $17{,}971{,}200=2^{11}.3^3.5^2.13$ | Jacques Tits |
| $M_{11}$ | $7{,}920=2^4.3^2.5.11$ | Émile Léonard Mathieu<br>Frank Nelson Cole |

| Nhóm đơn | Số phần tử<br>($p$ là số nguyên tố, $q = p^k$) | Tác giả |
|---|---|---|
| $M_{12}$ | $95{,}040=2^6.3^3.5.11$ | Émile Léonard Mathieu<br>George Abram Miller |
| $M_{22}$ | $443{,}520=2^7.3^2.5.7.11$ | Émile Léonard Mathieu<br>George Abram Miller |
| $M_{23}$ | $10{,}200{,}960=2^7.3^2.5.7.11.23$ | Émile Léonard Mathieu<br>George Abram Miller |
| $M_{24}$ | $244{,}823{,}040=2^{10}.3^3.5.7.11.23$ | Émile Léonard Mathieu<br>George Abram Miller |
| $Co_1$ | $4{,}157{,}776{,}806{,}543{,}360{,}000=2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23$ | John Horton Conway<br>John Griggs Thompson |
| $Co_2$ | $42{,}305{,}421{,}312{,}000=2^{18}.3^6.5^3.7.11.23$ | John Horton Conway<br>John Griggs Thompson |
| $Co_3$ | $495{,}766{,}656{,}000=2^{10}.3^7.5^3.7.11.23$ | John Horton Conway<br>John Griggs Thompson |
| $McL$ | $898{,}128{,}000=2^7.3^6.5^3.7.11$ | McLaughlin<br>Joyce Rogers |
| $HS$ | $44{,}352{,}000=2^9.3^2.5^3.7.11$ | Donald Gordon Higman<br>Charles Coffin Sims |
| $Sz$ | $448{,}345{,}497{,}600=2^{13}.3^7.5^2.7.11.13$ | Michio Suzuki |
| $Fi_{22}$ | $64{,}561{,}751{,}654{,}400=2^{17}.3^9.5^2.7.11.13$ | Bernd Fischer |
| $Fi_{23}$ | $2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23$ | Bernd Fischer |
| $Fi'_{24}$ | $2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29$ | Bernd Fischer |
| $B$ | $2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.19.23.41.47$ | Bernd Fischer |
| $M$ | $2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71$ | Bernd Fischer |
| $Th$ | $90{,}745{,}943{,}887{,}872{,}000=2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31$ | John Griggs Thompson<br>Bernd Fischer<br>Stephen D. Smith |
| $HN$ | $273{,}030{,}912{,}000{,}000=2^{14}.3^6.5^6.7.11.19$ | Koichiro Harada<br>Simon Phillips Norton |

| Nhóm đơn | Số phần tử ($p$ là số nguyên tố, $q = p^k$) | Tác giả |
|---|---|---|
| *He* | $4,030,387,200=2^{10}.3^3.5^2.7^3.17$ | René Pierre Held<br>Donald Gordon Higman<br>John McKay |
| $J_1$ | $175,560=2^3.3.5.7.11.19$ | Zvonimir Janko |
| $J_2$ | $604,800=2^7.3^3.5^2.7$ | Marshall Hall<br>Zvonimir Janko |
| $J_3$ | $50,232,960=2^7.3^5.5.17.19$ | Marshall Hall<br>Zvonimir Janko<br>John McKay |
| $J_4$ | $2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.31.37.43$ | Zvonimir Janko |
| *O'N* | $460,815,505,920=2^9.3^4.5.7^3.11.19.31$ | Michael Ernest O'Nan<br>Charles Coffin Sims |
| *Ly* | $51,765,179,004,000,000=2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67$ | Terence John Lyons<br>Charles Coffin Sims |
| *Ru* | $145,926,144,000=2^{14}.3^3.5^3.7.13.29$ | Arunas Rudvalis<br>John Horton Conway<br>David Bertram Wales |

**3. Lịch sử hình thành nhóm đơn hữu hạn**

Trong lý thuyết nhóm hữu hạn, một số nhà toán học gọi việc nghiên cứu các nhóm đơn là *"El Dorado",* đây là lĩnh vực nghiên cứu có nguồn gốc từ thế kỷ 19 và được tích cực nghiên cứu trong suốt thế kỷ 20. Quan niệm nhóm đơn là nhóm không có nhóm con chuẩn tắc nào ngoài chính nó và nhóm con tầm thường đã được Evariste Galois đề cập và công bố vào năm 1832, sau đó được phát triển vào thế kỷ 20. Hướng nghiên cứu đầu tiên về khái niệm nhóm đơn hữu hạn là *"bài toán phạm vi" (The range problem)* nhằm tìm hiểu cấu trúc bên trong nhóm dựa theo *"số phần tử"* của nhóm. Hướng nghiên cứu khái niệm nhóm đơn hữu hạn theo *"đẳng cấu"* được hình thành sau khi các khái niệm về nhóm trừu tượng, nhóm con chuẩn tắc và đẳng cấu nhóm ra đời trong các thập kỷ đầu của thế kỷ 20.

Lịch sử hình thành khái niệm nhóm đơn hữu hạn được tham khảo và tổng hợp dựa theo các tài liệu: [2], [3], [4].

***3.1. Khái niệm nhóm đơn hữu hạn sơ khai***

*3.1.1. Nhóm đơn hữu hạn trong các công trình của Évariste Galois*

Trong suốt 30 năm đầu của thế kỷ 19,

khái niệm nhóm hoán vị có mặt trong các kết quả nghiên cứu của Évariste Galois (1811-1832), người được xem là một trong những nhà sáng lập lý thuyết nhóm hoán vị. Galois là người đầu tiên dùng thuật ngữ *"nhóm"* khi nghiên cứu tập hữu hạn các hoán vị với *"toán nhân"* có tính *"đóng"*. Lịch sử nhóm đơn hữu hạn bắt nguồn từ những năm 1830 với các nghiên cứu của Galois về nhóm cùng lời giải cho phương trình đa thức bậc năm.

Cách tiếp cận nhóm của Galois bắt nguồn từ phép toán của các hoán vị. Các nghiệm của phương trình đa thức bậc *n* có thể hoán vị bằng *n!* cách khác nhau. Galois cho rằng những tính chất của phương trình đa thức được đặc trưng bởi tính chất của một nhóm duy nhất liên kết với phương trình đó. Để mô tả những tính chất của nhóm các phương trình này, năm 1832, Galois giới thiệu khái niệm nhóm con chuẩn tắc, việc tồn tại nghiệm của một phương trình giải được đồng nghĩa với việc tồn tại một nhóm con chuẩn tắc trong nhóm các phương trình. Xét nhóm *G*, gọi $\psi(r)=0$ là phương trình mệnh đề đúng với nghiệm hữu tỉ *r* trong phương trình ban đầu, nghiệm *r* có tính chất là không đổi đối với một số phần tử của *G*, nhưng thay đổi đối với những phần tử khác. Khi đó, các phần tử của *G* bất biến đối với *r* tạo thành một nhóm con *H*, nhóm con này được Galois gọi là *"nhóm con bất biến"* (*sous-groupe invariant*) của *G* (ngày nay gọi là nhóm con chuẩn tắc).

Quá trình này tiếp tục và dẫn đến phương pháp giải phương trình đa thức bằng căn thức và cũng là nguồn cảm hứng cho việc nghiên cứu nhóm đơn. Galois chia nhóm các phương trình thành *n "nhóm đa hợp"* (*groupes composés*), là nhóm có chứa nhóm con chuẩn tắc khác với phần tử đơn vị và toàn bộ nhóm. Nhóm đơn được Galois phát hiện khi chứng minh phương trình đa thức bậc năm không thể giải được bằng căn thức. Năm 1832, Galois công bố khái niệm nhóm đơn trong phát biểu: *"Nhóm đơn là nhóm hoán vị nhỏ nhất và là nhóm không thể phân tích được, khi số phần tử của nhóm này không phải là số nguyên tố thì phải là 5.4.3"*. Rõ ràng, Galois quan niệm *"nhóm không đa hợp"* là *"nhóm đơn"* (*groupes simples*). Sự phân biệt của Galois giữa nhóm đơn và nhóm đa hợp càng rõ ràng hơn khi Galois chứng minh nhóm các phép thế chẵn $A_5$ là nhóm đơn.

*3.1.2. Nhóm đơn hữu hạn trong các công trình của Camille Jordan*

Năm 1832, trong phát biểu: *"Một nhóm là nhóm hoán vị nhỏ nhất và là nhóm không thể phân tích được, khi số phần tử của nhóm này không phải là số nguyên tố thì phải là 5.4.3"* mà Galois cho rằng là nhóm đơn, tuy nhiên tuyên bố này chưa được Galois chứng minh và phải đến năm 1870 Camille Jordan (1838-1922) mới chứng minh kết quả này. Trên thực tế, Jordan đã đưa ra định nghĩa rõ hơn đối với khái niệm dãy cấu thành và mở rộng quan niệm về nhóm đơn của Galois với số phần tử lớn hơn. Năm 1870, trong cuốn *"Chuyên luận về các phép thế"* (*Traité des substitutions*), cuốn sách đầu tiên viết về lý thuyết nhóm, Jordan đã chứng minh phát biểu của Galois rằng nhóm đơn có số phần tử *5.4.3 = 60* luôn liên kết với phương trình đa thức bậc *5* và chính là nhóm thay phiên $A_5$. Jordan mở rộng hơn khi thiết lập sự tồn tại của *5* họ nhóm đơn hữu hạn. Một trong các họ này là nhóm các hoán vị chẵn của *n* phần tử $A_n$ ($n \geq 5$). Bốn họ còn lại là các nhóm tuyến tính xạ ảnh cổ điển trên trường hữu hạn đặc số nguyên tố, các

nhóm này ngày nay được gọi là một trong các nhóm đơn cổ điển.

***3.2. Quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo "số phần tử" - Bài toán phạm vi***

*3.2.1. Quan niệm nhóm đơn hữu hạn của Otto Hölder*

Bài toán phạm vi được khởi xướng bởi Otto Hölder (1859-1937) vào năm 1892. Trước đó, Hölder đã xuất bản hai bài báo đề cập đến bài toán này. Bài báo đầu tiên được xuất bản năm 1889 trên tờ *"Mathematische Annalen"*, Hölder nghiên cứu dãy thành phần mà Galois đã đề cập. Dãy cấu thành là một dãy các nhóm con chuẩn tắc $\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \ldots \lhd H_k = G$, trong đó không có nhóm con chuẩn tắc nào tồn tại giữa mỗi $H_i$ và $H_{i+1}$ (nghĩa là mỗi nhóm con trong dãy là nhóm con chuẩn tắc lớn nhất trong nhóm con chuẩn tắc kế tiếp) và các nhóm thương $H_i / H_{i-1}$ đều là các nhóm đơn. Các nhóm đơn này (được gọi là các yếu tố cấu thành) được xác định duy nhất và được chứng minh trong định lý Jordan-Hölder. Do đó, dãy các nhóm con chuẩn tắc đóng vai trò đặc trưng như một loại *"dấu vân tay"* của một nhóm. Hölder là một trong số những người đầu tiên nhận ra rằng các yếu tố cấu thành nên các nhóm là *"các khối xây dựng cơ bản"* và đáng được nghiên cứu đặc biệt. Bài báo thứ hai xuất bản năm 1892, trong đó Hölder phát biểu: *"Sẽ là mối quan tâm lớn nhất nếu có một cuộc khảo sát về tất cả các nhóm đơn với số lượng hữu hạn các phần tử biết trước"*.

Nội dung của bài toán phạm vi không khó hiểu, mục đích của bài toán là xác định các nhóm đơn bằng cách mở rộng quan niệm về nhóm đơn của Galois. Câu hỏi của bài toán phạm vi: *"Cho một số tự nhiên cụ thể, giả sử n, có thể nói gì về cấu trúc của một nhóm bất kỳ có n phần tử? Đặc biệt, có thể xác định xem liệu nhóm này có bất kỳ nhóm con chuẩn tắc nào ngoài chính nó và nhóm con tầm thường hay không? Nếu nhóm này là nhóm đơn, nó có phải là duy nhất không?"*. Để trả lời cho câu hỏi này, Hölder sử dụng các định lý của Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832-1918), một nhà toán học người Na Uy, đã đưa ra các định lý Sylow vào năm 1872 bằng cách nghiên cứu lý thuyết nhóm hoán vị. Các định lý Sylow mà ngày nay được phát biểu và chứng minh dựa trên khái niệm cơ bản trong định lý của Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

*Định lý Lagrange. Giả sử H là một nhóm con của G. Khi đó* $|G| = |H||G:H|$.

Lưu ý rằng thuật ngữ ngày nay gọi $|G:H|$ là chỉ số của $H$ trong $G$, là số lớp ghép phải của $H$ trong $G$. Một lớp ghép phải của $H$ trong $G$ là tập $Hg = \{hg / h \in H\}$, trong đó $H \subseteq G$. Dễ dàng nhận thấy nhóm $G$ là hợp của tất cả các lớp ghép phải, lực lượng của mỗi lớp ghép phải bằng số phần tử của nhóm con $H$, với hai dữ kiện này đủ để chứng minh định lý Lagrange.

Nhiều bổ đề mà Hölder sử dụng trong các định lý tổng quát xuất phát từ kết quả của các định lý Sylow, trước khi công bố các định lý, Sylow đưa ra khái niệm *"nhóm con p-Sylow"* sau: *"Nhóm con p-Sylow là một nhóm con của nhóm G nếu nó có số phần tử là lũy thừa số nguyên tố p trong phân tích số phần tử của G thành tích các thừa số nguyên tố"*. Tập các nhóm con *p-Sylow* của $G$ ký hiệu $Syl_p(G)$. Ví dụ nhóm $G$ có $2^4.11^2$ phần tử thì $Syl_p(G)=\{2\text{-Sylow}, 11\text{-Sylow}\}$, trong đó nhóm con *2-Sylow* có số phần tử $2^4 = 16$.

*Định lý Sylow 1. Nếu* $p^k \,|\, |G|$ *thì G có ít nhất một nhóm con có* $p^k$ *phần tử, với p là số nguyên tố.*

*Định lý Sylow 2. Nếu $H \subseteq G$ và $|H| = p^k$ thì H chứa trong một nhóm con p-Sylow.*

Rõ ràng, theo *Định lý Sylow 1* thì $Syl_p(G) \neq \varnothing$ với mọi nhóm *G* hữu hạn. Một hệ quả từ *Định lý Sylow 2* phát biểu rằng: *"Nếu nhóm G chỉ tồn tại duy nhất nhóm con p-Sylow thì nó là nhóm con chuẩn tắc của G"*. Kết quả này cho phép loại bỏ các nhóm không đơn dựa theo *"số phần tử"* của nhóm.

Hölder đã nghiên cứu các nhóm có số phần tử từ *1* đến *200* và không phát hiện ra bất kỳ nhóm đơn mới nào, vì nhóm đơn duy nhất có số phần tử *60* đã được Galois tìm thấy là $A_5$, cũng như nhóm có số phần tử *168* là $PSL_2(7)$ do Jordan phát hiện năm 1870. Tuy nhiên, phương pháp xác định nhóm đơn hữu hạn của Hölder rất quan trọng và đã ảnh hưởng đến nhiều nhà toán học khác khi nghiên cứu theo hướng *"bài toán phạm vi"*.

Thành tựu của Hölder là chứng minh các *"định lý tổng quát"* có thể được áp dụng trong bất kỳ nhóm nào có số phần tử thỏa một công thức *"tổng quát"*. Một trong những định lý tổng quát của Hölder là nhóm có số phần tử bằng tích của nhiều nhất *3* số nguyên tố (không nhất thiết phải khác nhau) là nhóm không đơn.

*Định lý Hölder. Nếu $|G| = pq$, hay $|G| = p^2q$, hay $|G| = pqr$, trong đó p, q, r là các số nguyên tố, thì G là nhóm không đơn.*

Sức mạnh của những định lý này là loại bỏ tất cả các nhóm không đơn trong các nhóm có số phần tử từ *1* đến *200*, chỉ có *7* nhóm sau là các nhóm đơn: $A_5$ (*60* phần tử), nhóm có số phần tử *90, 112, 120, 144, 180* và *168* (nhóm $PSL_2(7)$). Ngoại trừ *2* nhóm đơn $A_5$ và $PSL_2(7)$ được Hölder sử dụng lý thuyết nhóm hoán vị để chứng minh trước đó, *5* nhóm còn lại được Hölder tính toán để loại bỏ các nhóm không đơn và sử dụng các định lý Sylow, từ đó suy ra các nhóm này là nhóm đơn.

*3.2.2. Quan niệm nhóm đơn hữu hạn của William Burnside*

William Burnside (1852-1927) là một trong các nhà toán học nghiên cứu nhóm đơn hữu hạn theo hướng *"bài toán phạm vi"* do Hölder khởi xướng, Burnside tiếp tục sử dụng các định lý Sylow và lý thuyết nhóm hoán vị để mở rộng các định lý tổng quát của Hölder đối với các nhóm có số phần tử bằng tích của nhiều nhất *4* số nguyên tố (không nhất thiết phải khác nhau), điều mà Sylow chưa giải quyết trước đó.

Năm 1895, tiếp theo kết quả nghiên cứu của Frank Nelson Cole (1861-1926) đã xác định các nhóm đơn có số phần tử từ *201* đến *660*, Burnside hoàn thành nghiên cứu các nhóm có số phần tử trong phạm vi từ *661* đến *1092*. Ngay sau thời điểm này, bắt đầu từ năm 1896, một kỹ thuật mới được phát triển bởi Burnside và Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) mà ngày nay gọi là lý thuyết đặc trưng (character theory). Lý thuyết này nghiên cứu các hàm xác định (còn gọi là *"hàm đặc trưng"*) từ một nhóm đến tập các số phức, đã có tác động lớn đến việc nghiên cứu các nhóm đơn trong suốt thế kỷ 20. Chính lý thuyết nhóm đặc tính đã cung cấp cho Burnside các công cụ để chứng minh *"Định lý $p^aq^b$ Burnside"*, một định lý tổng quát đã mở rộng các kết quả còn hạn chế đối với các nhóm có số phần tử bằng tích của nhiều nhất *4* số nguyên tố. Năm 1904, Burnside chứng minh rằng bất kỳ nhóm nào có số phần tử $p^aq^b$, trong đó *p* và *q* là số nguyên tố, đều là nhóm không đơn, ngoại trừ các nhóm có số phần tử là số nguyên tố. Rõ ràng, định lý này đóng vai trò quan trọng trong việc đơn giản hóa các yêu cầu của

bài toán phạm vi sau năm 1904. Việc mở rộng kết quả này đối với các nhóm có số phần tử $p^aq^br^c$ là mục tiêu chính được nghiên cứu trong suốt thế kỷ 20 dựa trên nền tảng của lý thuyết nhóm đặc tính.

*3.2.3. Hoàn thành quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo "số phần tử" có số phần tử tối đa một triệu*

Đầu thế kỷ 20, George Abram Miller (1863-1951) cùng với sinh viên của mình là George Herbert Ling (1874-1942) tiếp tục nghiên cứu bài toán phạm vi đối với các nhóm có số phần tử trong phạm vi từ *1093* đến *2000*. Các nghiên cứu của Miller và Ling vẫn sử dụng các công cụ hiện có là định lý Sylow và lý thuyết nhóm đặc tính. Ngoài ra, Miller và Ling kết hợp lý thuyết nhóm hoán vị với khái niệm *"nhóm bắc cầu"* để xác định nhóm đơn hữu hạn. Với phương pháp mới này, Miller và Ling chỉ ra rằng không có nhóm đơn nào có số phần tử từ *1093* đến *2000*.

Có một khoảng trống khá lớn sau khi Miller và Ling hoàn thành bài toán phạm vi có số phần tử từ *1093* đến *2000* năm 1900. Đến năm 1912, Lewis Parker Siceloff (1880-1950) là nhà toán học tiếp theo giải quyết các nhóm có số phần tử trong phạm vi từ *2001* đến *3640*. Siceloff đã tìm thấy các nhóm đơn có số phần tử *2448, 2520* và *3420* nhưng Siceloff không thể chứng minh tính duy nhất của nhóm đơn có số phần tử *2520,* mãi đến năm 1922 Miller mới phát hiện $A_7$ là nhóm đơn duy nhất có *2520* phần tử.

Năm 1924, Cole trở lại nghiên cứu bài toán phạm vi với các nhóm có số phần tử trong phạm vi từ *3641* đến *6232*. Cole tìm thấy bốn nhóm đơn có số phần tử *3420, 4080, 5616, 6048* và gặp khó khăn về tính duy nhất của hai nhóm đơn có số phần tử *5616, 6048*. Mười tám năm sau, năm 1942, Richard Dagobert Brauer (1901-1977) chứng minh cả hai nhóm này là nhóm đơn duy nhất bằng cách sử dụng lý thuyết nhóm đặc tính.

Chiến tranh thế giới thứ hai gần như làm gián đoạn các nghiên cứu lý thuyết nhóm hữu hạn. Phải mất mười chín năm sau bài toán phạm vi mới thu hút lại sự chú ý của các nhà đại số để tìm ra phương pháp hoàn thành bài toán này. Năm 1963, Ernest Arthur Michael (1925-2013) tiếp tục nghiên cứu bài toán phạm vi với các công cụ trước đó mà Cole và Brauer sử dụng. Michael chỉ ra rằng chỉ có năm nhóm đơn có số phần tử *7800, 7920, 9828, 12180, 14880* trong số các nhóm có số phần tử trong phạm vi từ *6233* đến *20000*.

Năm 1972, Marshall Hall (1910-1990) đã mở rộng bài toán phạm vi với các nhóm có số phần tử lên đến một triệu. Hall kết hợp tất cả các phương pháp đã sử dụng từ cuối thế kỷ 19 với công cụ máy tính hiện đại để tính toán dựa trên các kỹ thuật tiên tiến của lý thuyết nhóm đặc tính. Phương pháp của Hall xác định được tất cả các nhóm đơn có số phần tử trong phạm vi từ *1* đến *1,000,000* và không thành công với *21* nhóm. Năm 1975, Paul Fong (1952) và hai sinh viên Beisiegel và Stingl đã mở rộng nghiên cứu và xử lý *21* nhóm này, bài toán phạm vi với các nhóm có số phần tử lên đến một triệu đã hoàn tất.

Quan niệm nhóm đơn hữu hạn dựa trên số phần tử với số phần tử tối đa một triệu đã hình thành trong quá trình phát triển của bài toán phạm vi được tóm tắt trong bảng sau:

**Bảng 2.** Các nhóm đơn của bài toán phạm vi

| Năm công bố | Số phần tử | Tác giả |
|---|---|---|
| 1892 | *1-200* | Otto Hölder |
| 1892<br>1893 | *201-660* | Frank Nelson Cole |
| 1895 | *661-1,092* | William Burnside |
| 1900 | *1,093-2,000* | George Abram Miller<br>George Herbert Ling |
| 1912 | *2,001-3,640 (*ngoại trừ *2,520)* | Lewis Parker Siceloff |
| 1922 | *2,520* | George Abram Miller |
| 1924 | *3,641-6,232 (*ngoại trừ *5,616 và 6,048)* | Frank Nelson Cole |
| 1942 | *5,616 và 6,048* | Richard Dagobert Brauer |
| 1963 | *6,233-20,000* | Ernest Arthur Michael |
| 1972 | *1-1,000,000 (*ngoại trừ *21* nhóm*)* | Marshall Hall |
| 1975 | *21* nhóm của Hall | Paul Fong<br>Beisiegel và Stingl |

Song song với quá trình phát triển của bài toán phạm vi, một số nhà toán học phát hiện các nhóm đơn hữu hạn mới bằng phương pháp kết hợp công cụ máy tính hiện đại với các kỹ thuật tiên tiến của lý thuyết nhóm. Các nhóm đơn hữu hạn sporadic này được thống kê trong bảng sau:

**Bảng 3.** Các nhóm đơn sporadic

| Năm công bố | Số phần tử | Tác giả |
|---|---|---|
| 1964 | $17,971,200=2^{11}.3^3.5^2.13$ | Jacques Tits |
| 1966 | $175,560=2^3.3.5.7.11.19$ | Zvonimir Janko |
| 1967 | $604,800=2^7.3^3.5^2.7$ | Marshall Hall<br>Zvonimir Janko |
| 1968 | $44,352,000=2^9.3^2.5^3.7.11$ | Donald Gordon Higman<br>Charles Coffin Sims |
| 1969 | $50,232,960=2^7.3^5.5.17.19$ | Marshall Hall<br>Zvonimir Janko<br>John McKay |

| Năm công bố | Số phần tử | Tác giả |
|---|---|---|
| 1969 | $898,128,000=2^7.3^6.5^3.7.11$ | McLaughlin<br>Joyce Rogers |
| 1969 | $4,030,387,200=2^{10}.3^3.5^2.7^3.17$ | René Pierre Held<br>Donald Gordon Higman<br>John McKay |
| 1969 | $448,345,497,600=2^{13}.3^7.5^2.7.11.13$ | Michio Suzuki |
| 1969 | $495,766,656,000=2^{10}.3^7.5^3.7.11.23$ | John Horton Conway<br>John Griggs Thompson |
| 1969 | $42,305,421,312,000=2^{18}.3^6.5^3.7.11.23$ | John Horton Conway<br>John Griggs Thompson |
| 1969 | $4,089,460,473,293,004,800$<br>$=2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23$ | Bernd Fischer |
| 1969 | $4,157,776,806,543,360,000=2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23$ | John Horton Conway<br>John Griggs Thompson |
| 1969 | $1,255,205,709,190,661,721,292,800$<br>$=2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29$ | Bernd Fischer |
| 1969 | $64,561,751,654,400=2^{17}.3^9.5^2.7.11.13$ | Bernd Fischer |
| 1971 | $51,765,179,004,000,000=2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67$ | Terence John Lyons<br>Charles Coffin Sims |
| 1972 | $145,926,144,000=2^{14}.3^3.5^3.7.13.29$ | Arunas Rudvalis<br>John Horton Conway<br>David Bertram Wales |
| 1973 | $460,815,505,920=2^9.3^4.5.7^3.11.19.31$ | Michael Ernest O'Nan<br>Charles Coffin Sims |
| 1973 | $273,030,912,000,000=2^{14}.3^6.5^6.7.11.19$ | Koichiro Harada<br>Simon Phillips Norton |
| 1974 | $90,745,943,887,872,000=2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31$ | John Griggs Thompson<br>Bernd Fischer<br>Stephen D. Smith |
| 1974 | $2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.19.23.41.47$ | Bernd Fischer |
| 1974 | $2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71$ | Bernd Fischer |
| 1975 | $2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.31.37.43$ | Zvonimir Janko |

### *3.3. Quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo "đẳng cấu"*

*3.3.1. Bối cảnh ra đời quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo "đẳng cấu"*

Lý thuyết nhóm tổng quát xuất hiện vào những năm đầu của thế kỷ 20, tài liệu chuyên khảo giới thiệu toàn bộ lý thuyết nhóm tổng quát đầu tiên được in trong cuốn *"Các yếu tố trong lý thuyết nhóm trừu tượng"* (*Éléments de la théorie des groupes abstraits*) của Jean-Armand de Séguier (1862-1937) xuất bản năm 1904 được xem là thời điểm ra đời của lý thuyết nhóm trừu tượng. Trong sách của mình Séguier giới thiệu khái niệm đồng cấu, đẳng cấu, tự đẳng cấu, định lý đẳng cấu đầu tiên và lý thuyết *p*-nhóm. Tất cả các lý thuyết nhóm được Séguier trình bày một cách tổng quát, còn với các nhóm cụ thể thì Séguier đưa vào phụ lục. Séguier cũng dành một chương để giới thiệu về lý thuyết nhóm hữu hạn theo khuynh hướng nghiên cứu tổng quát. Tại thời điểm này, lý thuyết nhóm được các nhà toán học phát triển theo nhiều hướng nghiên cứu, sự phân rẽ của lý thuyết nhóm có thể nhận thấy rõ qua khá nhiều xu hướng nghiên cứu khác nhau, một trong số các hướng nghiên cứu xuất hiện sớm nhất là lý thuyết nhóm hữu hạn. Việc chứng minh nhóm hữu hạn tổng quát rất khó nên các nhà toán học đã rẽ hướng nghiên cứu các nhóm hữu hạn trong một số trường hợp đặc biệt, dựa trên ý tưởng *"trường hợp đặc biệt"* trong lý thuyết của Galois, đó là tìm kiếm các nhóm đơn hay các nhóm giải được.

Với sự ra đời của khái niệm nhóm năm 1904, khái niệm nhóm con chuẩn tắc được Harold Hilton (1876-1974) công bố vào năm 1908 trong cuốn *"Giới thiệu lý thuyết nhóm có cấp hữu hạn"* (*An Introduction to the Theory of Groups of Finite Order*), Hilton định nghĩa: *"Tương tự, nếu mọi phần tử của G biến một nhóm con H thành chính nó thì H được gọi là chuẩn tắc(hay gọi là tự liên hợp) hoặc H được gọi là nhóm con bất biến của G (hay gọi là "một nhóm con chuẩn tắc trong G")"*. Định nghĩa của Hilton chính là khái niệm nhóm con chuẩn tắc ngày nay trong lý thuyết nhóm trừu tượng (kể cả nhóm vô hạn).

Năm 1957 được đánh dấu là thời điểm ra đời khái niệm đẳng cấu, định nghĩa đẳng cấu chính thức xuất hiện trong ấn phẩm *"Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure"* như sau: *"Cho U, U' là hai tập có cấu trúc cùng loại $\Xi$ và cở sở lần lượt là $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$ và $E'_1$, $E'_2$, ..., $E'_n$, xét n song ánh $f_i : E_i \to E_i^{'}$. Nếu S là một biểu diễn lược đồ kiến trúc S trên n tập cơ sở của $\Xi$ thì $\langle f_1,..., f_n \rangle^S$ được định nghĩa là đẳng cấu nếu $\langle f_1,..., f_n, Id_1,..., Id_m \rangle^S (U) = U^{'}$, trong đó $Id_i$ là ánh xạ đồng nhất từ tập bổ trợ $A_i$ vào chính nó."*. Với sự ra đời của khái niệm nhóm trước đó, Bourbaki đã liên kết cấu trúc nhóm và đẳng cấu, khái niệm đẳng cấu nhóm chính thức hình thành: *"Một đồng cấu nhóm là một ánh xạ từ nhóm G đến nhóm G' bảo toàn quan hệ cấu trúc"*. Tính chất *"bảo toàn cấu trúc qua phép đẳng cấu"* đã ảnh hưởng đến các nhà toán học nghiên cứu nhóm đơn hữu hạn tại thời điểm đó.

*3.3.2. Hoàn thành quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo "đẳng cấu"*

Ý tưởng *"nhóm đơn hữu hạn đẳng cấu với một nhóm nào đó"* được khởi sướng bởi Brauer khi Brauer nghiên cứu các nhóm có số phần tử chẵn chứa tâm hóa của mọi phần tử (khác đơn vị) giao hoán. Cùng thời điểm này, Gordon Elliott Wall (1925) bắt đầu nghiên cứu nhóm $PGL_2(q)$ và

Michio Suzuki (1926-1998) phát hiện các đặc tính của $PGL_2(q)$. Năm 1958, một kết quả đáng được công nhận là quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo đẳng cấu đầu tiên đối với các nhóm hữu hạn không giao hoán có số phần tử chẵn có tên gọi Định lý Brauer - Suzuki – Wall.

Những năm đầu thập niên 60, nhóm đơn hữu hạn tổng quát gần như không nhận được sự quan tâm thực sự của các nhà toán học. Năm 1963 đánh dấu cột mốc quan trọng trong sự tiến triển của khái niệm nhóm đơn hữu hạn tổng quát khi Walter Feit (1930-2004) và John Griggs Thompson (1932) xuất bản cuốn *"Nghiên cứu về cấp lẻ"* (*Odd Order Paper*) công bố *"Định lý cấp lẻ"*. Trong định lý này Feit và Thompson sử dụng lại khái niệm *"nhóm giải được"* đã được định nghĩa bởi Burnside vào năm 1900: *"Nhóm G được gọi là nhóm giải được nếu G chứa một dãy nhóm con* $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \ldots \lhd G_k = G$ *và nhóm thương* $G_j/G_{j-1}$ *là nhóm giao hoán,* $\forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$*."*

*Định lý cấp lẻ. Mọi nhóm hữu hạn có số phần tử lẻ đều là nhóm giải được.*

Kết quả của *Định lý cấp lẻ* đã khởi đầu cho quan niệm nhóm đơn hữu hạn theo đẳng cấu khi Feit và Thompson công bố Định lý đặc trưng của nhóm đơn hữu hạn.

*Định lý Feit – Thompson. G là nhóm đơn có số phần tử lẻ khi và chỉ khi G đẳng cấu với* $C_p$*, với p là số nguyên tố.*

Hạn chế của *Định lý Feit – Thompson* là chưa giải quyết các nhóm đơn có số phần tử chẵn. Vào cuối những năm 1960, Carl Martin Bender (1943) tiến hành nghiên cứu cấu trúc nhóm con của 2-nhóm, Bender định nghĩa "phép nhúng mạnh": *"Nhóm con thực sự M của nhóm hữu hạn G được gọi là phép nhúng mạnh trong G nếu M có số phần tử chẵn và với* $T \in Syl_2(M)$ *thì* $NG(Q) \lhd M$*, với mọi* $\{e\} \neq Q \lhd T$*."*

Năm 1968, Bender đã thành công khi công bố Định lý Phép nhúng mạnh Bender: *"Cho G là nhóm hữu chứa một phép nhúng mạnh vào nhóm con M. Khi đó,* $G \cong SL_2(2^n)$, $Sz(2^n)$ *hay* $PSU_3(2^n)$*."*

Các kết quả của *Định lý Feit – Thompson* hay *Định lý Phép nhúng mạnh Bender* vẫn chưa định nghĩa được nhóm đơn hữu hạn tổng quát. Năm 1972, tại Đại học Chicago, Daniel E. Gorenstein (1923-1992) trình bày ý tưởng *"bất kỳ nhóm đơn hữu hạn nào đều đẳng cấu với một trong những nhóm đơn đã được phát hiện"* bằng cách phân tích cấu trúc của nó. Ý tưởng của Gorenstein nhanh chóng thu hút sự quan tâm của rất nhiều nhà toán học quốc tế, những nhà toán học đóng góp chính chủ yếu đến từ Hoa Kỳ, Đức, Anh, Canada, Úc và Nhật Bản. Các nhóm nghiên cứu phân tích cấu trúc nhóm đơn theo nhiều phương pháp khác nhau, mỗi phương pháp tập trung vào các nhóm có cấu trúc cùng loại.

Phương pháp phân tích cục bộ theo đuổi ý tưởng của *Định lý Feit – Thompson* nhưng sử dụng các kỹ thuật mới để hoàn chỉnh. Các kỹ thuật mới được phát triển bởi Thompson, kỹ thuật chính là xem xét tâm hóa và chuẩn tắc hóa của các *p*-nhóm (là nhóm có số phần tử là lũy thừa số nguyên tố *p*) và phân tích mối quan hệ của chúng. Một thuật ngữ được Thompson sử dụng lại liên quan đến chuẩn tắc hóa của một *p*-nhóm con khác đơn vị đã công bố những năm 1960, đó là định nghĩa *"nhóm con cục bộ"* của Jonathan Lazare Alperin (1937): "*Một nhóm con cục bộ (hoặc p-cục bộ) của nhóm hữu hạn G là chuẩn tắc hóa của một p-nhóm con khác đơn vị trong G,*

*với p là số nguyên tố.*". Phương pháp kiểm tra các nhóm con cục bộ được Thompson phát triển thêm khi Thompson đề xuất khái niệm *N*-nhóm năm 1968: *"Một N-nhóm là một nhóm đơn mà mỗi nhóm con cục bộ đều là nhóm giải được."*

Thompson đã tìm ra tất cả các nhóm đơn phù hợp với mô tả của *N*-nhóm và chiến lược của Thompson là chứng minh rằng một *N*-nhóm tùy ý có cấu trúc tương đồng với một trong các nhóm đã được tìm ra. Sau đó, sự tương đồng được chứng minh là đẳng cấu.

*Định lý N-nhóm cục bộ. Nếu G là một N-nhóm đơn thì G đẳng cấu với một trong các nhóm sau: $PSL_2(q)$, trong đó $q > 3$; $Sz(2^{2n+1})$, trong đó $n \geq 1$;$PSL_3(3)$, $U^3(3)$, ${}^2F_4(2)'$, $A_7$ hoặc $M_{11}$.*

Một phương pháp khác với kỹ thuật phân tích cục bộ là phân tích cấu trúc hình học của Bernd Fischer (1936-2020). Cách tiếp cận hình học của Fischer là xem xét một đồ thị có các đỉnh là các phần tử của lớp liên hợp và bất kỳ hai phần tử nào giao hoán với nhau được nối với nhau bằng một cạnh. Nhóm *G* hoạt động như một tự đồng cấu nhóm của đồ thị vì qua phép liên hợp, *G* hoán vị các đỉnh của đồ thị nhưng bảo toàn quan hệ tỷ lệ trên đồ thị. Do đó, Fischer thấy rằng cấu trúc của nhóm *G* có liên quan đến đồ thị. Ý tưởng của Fischer đã truyền cảm hứng cho Michael George Aschbacher (1944), và các định nghĩa liên quan đến nhóm đơn được xuất phát từ bản chất của đồ thị. Năm 1975, Aschbacher chứng minh Định lý nhóm Mỏng. Sau đó, Aschbacher tiếp tục phát triển bài toán và chứng minh Định lý *C(G, T)* địa phương mà từ đó Aschbacher, Richard M. Foote (1950) và vài người khác công bố Định lý *C(G, T)* toàn cục sau:

*Định lý C(G, T) toàn cục. Cho G là nhóm đơn hữu hạn có đặc tính loại 2 và có hạng là 2-rank ≥ 3. Cho T là nhóm con 2-Sylow của G và ký hiệu C(G, T) là nhóm con của G được sinh ra bởi tất cả các chuẩn tắc hóa của nhóm con khác đơn vị trong T. Nếu C(G, T) < G thì C(G, T) là phép nhúng mạnh trong G và $G \cong SL2(^{2n})$, $PSU3(2^n)$ hay $Sz(2^n)$.*

Các phương pháp khác để chứng minh nhóm đơn hữu hạn bất kỳ đều đẳng cấu với một trong các nhóm đơn đã được phát hiện hầu như đã được giải quyết. Tất cả các định lý lớn khác được đề cập trong các nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Năm 1994, Gorenstein, Terence John Lyons (1953) và Ronald Solomon (1948) công bố Định lý đặc trưng đầu tiên của nhóm đơn hữu hạn.

Vào khoảng năm 1989, Aschbacher nhận thấy thiếu một số trường hợp. Năm 1996, Aschbacher nghiên cứu trường hợp các nhóm Quasithin, lấp đầy các trường hợp còn thiếu vào thời điểm đó. Năm 2008, Koichiro Harada (1953) và Solomon chỉ ra lỗi nhỏ trong tính toán hệ số của nhóm Mathieu $M_{22}$, Harada và Solomon đã chỉnh sửa và hoàn tất *Định lý đặc trưng* của nhóm đơn hữu hạn.

## 4. Các đặc trưng tri thức luận và các chướng ngại tri thức luận khái niệm nhóm đơn hữu hạn

### *4.1. Các đặc trưng tri thức luận khái niệm nhóm đơn hữu hạn*

Quá trình hình thành, phát triển khái niệm nhóm đơn hữu hạn gắn liền với lịch sử hình thành lý thuyết nhóm, nhóm con chuẩn tắc, đẳng cấu nhóm và sự ra đời của nhiều nhóm đơn hữu hạn có cấu trúc đa dạng với số phần tử từ nhỏ đến lớn. Các quan niệm về nhóm đơn hữu hạn trong suốt

lịch sử hình thành khái niệm nhóm đơn hữu hạn xác định các đặc trưng tri thức luận khái niệm nhóm đơn hữu hạn như sau:

- Đặc trưng *bảo toàn tính "đơn" qua phép đẳng cấu*: tính *"đơn"* của khái niệm nhóm đơn hữu hạn được bảo toàn qua phép đẳng cấu nhóm.

- Đặc trưng về *tính tồn tại và duy nhất*: sự tồn tại nhóm đơn hoàn toàn có thể xác định được qua phân tích số phần tử của nhóm thành tích lũy thừa các số nguyên tố và nhóm đơn này là nhóm đơn duy nhất sai khác đẳng cấu nhóm.

- Đặc trưng *đa cấu trúc*: các nhóm đơn hữu hạn được phát hiện có cấu trúc đa dạng, được sử dụng trong nhiều lĩnh vực toán học như Đại số trừu tượng, Đại số Lie, Hình học, Tôpô.

- Đặc trưng *trừu tượng:* khái niệm nhóm đơn hữu hạn tổng quát được hình thành từ sự kết hợp của nhiều kiến thức trừu tượng như khái niệm nhóm hữu hạn, nhóm con chuẩn tắc, đẳng cấu nhóm.

### *4.2. Nhận dạng các chướng ngại tri thức luận khái niệm nhóm đơn hữu hạn*

Quá trình hình thành khái niệm nhóm đơn hữu hạn cho thấy việc xác định cấu trúc của một nhóm đơn hữu hạn là sự kết hợp của nhiều kiến thức trừu tượng như khái niệm nhóm hữu hạn, nhóm con chuẩn tắc, đẳng cấu nhóm và cấu trúc của các họ nhóm đơn hữu hạn (Cyclic, Alternating, Lie, Sporadic và Tits). Hai chướng ngại tri thức luận sau có thể là chướng ngại đối với người học khi tiếp cận cấu trúc của một nhóm đơn hữu hạn:

- Chướng ngại *trừu tượng hóa*: nhóm đơn hữu hạn gắn liền với tính trừu tượng của đẳng cấu nhóm, sự trừu tượng của khái niệm đồng dạng cấu trúc giữa nhóm đơn hữu hạn tổng quát với một trong các họ nhóm đơn hữu hạn. Chướng ngại này sinh ra các khó khăn mà người học phải đương đầu khi chuyển từ nghiên cứu các nhóm trên tập hợp số sang nghiên cứu các nhóm trừu tượng.

- Chướng ngại về *sự tích hợp nhiều khái niệm toán học*: khái niệm nhóm đơn hữu hạn tổng quát được tích hợp từ nhiều khái niệm như nhóm, nhóm con chuẩn tắc, cấp của phần tử trong nhóm hữu hạn, lực lượng của nhóm hữu hạn, đẳng cấu nhóm. Chướng ngại này sinh ra các khó khăn mà người học phải đương đầu khi giải quyết các bài toán xác định cấu trúc của nhóm đơn hữu hạn.

## 5. Kết luận

Sự ra đời Định lý đặc trưng của nhóm đơn hữu hạn được xem là một bước ngoặt trong lý thuyết nhóm hữu hạn của đại số trừu tượng và gần như thay đổi hoàn toàn các vấn đề được nghiên cứu và các phương pháp được sử dụng. Để xác định tính đơn của một nhóm hữu hạn, thông qua Định lý đặc trưng và các kỹ thuật tính toán mới sẽ thu được một số thông tin quan trọng của nhóm.

Sự hình thành khái niệm nhóm đơn hữu hạn chịu ảnh hưởng bởi nhiều quan niệm mới như đẳng cấu nhóm, định lý đẳng cấu đầu tiên và lý thuyết *p*-nhóm, *p*-cục bộ, nhóm đặc tính và nhóm giải được. Các họ nhóm đơn hữu hạn trong Định lý đặc trưng cho thấy nhóm đơn hữu hạn có cấu trúc đa dạng, thuộc nhiều lĩnh vực toán học như Đại số trừu tượng, Đại số Lie, Hình học, Tôpô.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] T.H.C Le, "Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên", in *Hội thảo quốc tế về didactics Toán lần thứ 6*, Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh, 2017, pp.17-39.

[2] R.A. Wilson, *The Finite Simple Groups*, Verlag London: Springer, 2007.

[3] L. Corry, *Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure*, Heidelberg Berlin: Springer, 1992, pp.315-348.

[4] F.C.C. Dohert, "A history of finite simple groups", MA thesis, University of Colorado at Denver, United States, 1997.

Ngày nhận bài: 19/02/2024 Ngày chấp nhận đăng: 20/4/2024