TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SÀI GÒN
ISSN 1859 - 3208
Số 85 (02/2023)

SAIGON UNIVERSITY
SCIENTIFIC JOURNAL
OF SAIGON UNIVERSITY
No. 85 (02/2023)

Email: tcdhsg@sgu.edu.vn ; Website: http://sj.sgu.edu.vn/

TÍNH ỔN ĐỊNH TOÀN CỤC CỦA MẠNG NƠRON BỘ NHỚ HAI CHIỀU KẾT HỢP VỚI TRỄ THỜI GIAN VÀ XUNG BIẾN THIÊN

Global stability of the impulsive bidirectional associative memory neural network models with time delays

Lê Đào Hải An[(1)*], Đặng Vân Thu Thủy[(1)]

[(1)]Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

TÓM TẮT

Trong bài báo này, mô hình tổng quát về phương trình vi phân hàm chứa xung và một số định lí về tính ổn định tiệm cận của nghiệm không đối với phương trình vi phân hàm chứa xung được trình bày. Bằng cách áp dụng phương pháp hàm Lyapunov-Razumikhin, một điều kiện đủ về tính ổn định tiệm cận toàn cục của điểm cân bằng của lớp mạng nơron bộ nhớ hai chiều kết hợp dưới tác động của trễ thời gian và xung biến thiên sẽ thu được trong phần cuối bài báo.

Từ khóa: *mạng nơron bộ nhớ hai chiều kết hợp, ổn định tiệm cận toàn cục, ổn định tiệm cận toàn cục đều*

ABSTRACT

In this paper, the general model of impulsive functional differential equations and some theorems on global asymptotic stability of the zero solution for impulsive functional differential equations are presented. By applying the Lyapunov-Razumikhin method, sufficient conditions for global asymptotic stability of the equilibrium point of impulsive bidirectional associative memory models with time delays will be obtained at the end of the paper.

Keywords: *bidirectional associative memory neural network, globally asymptotically stable, uniformly globally asymptotically stable*

1. Đặt vấn đề

Từ rất lâu, các nhà khoa học đã tìm cách thiết lập được bộ máy giống với não người, tạo cho nó có khả năng tự học tập, nhận dạng và phân loại, thường gọi là mạng nơron nhân tạo. Cùng với sự phát triển vượt bậc của khoa học kĩ thuật, đặc biệt trong ngành điện tử hiện đại, mạng nơron nhân tạo đã tìm thấy rất nhiều ứng dụng thành công trong các lĩnh vực khác nhau của đời sống xã hội và khoa học kĩ thuật. Rõ ràng rằng ở đâu có vấn đề về dự báo, phân loại, điều khiển thì mạng nơron nhân tạo đều có thể áp dụng được.

Theo quan điểm của lý thuyết động lực học, trong toán học, mạng nơron nhân tạo được mô tả bởi các mô hình toán học. Một trong những bài toán quan trọng thu hút sự chú ý nghiên cứu của các nhà khoa học là tính ổn định của mạng nơron dưới tác động của các trễ thời gian và các nhiễu xung biến thiên mà điều này thường xuyên xảy ra trong các mạng cơ học, điện

*Tác giả liên hệ: haian441979@vimaru.edu.vn

tử. Bài toán dạng này thường được mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân hàm chứa xung và nghiên cứu tính ổn định của nghiệm của hệ đó. Một trong những phương pháp hiệu quả dùng để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân hàm chứa xung là phương pháp Lyapunov [1], [3]. Rất nhiều kết quả cả về lý thuyết và thực hành đã chỉ ra rằng, nếu hàm Lyapunov được xây dựng tốt có thể cho phép đánh giá miền ổn định trong không gian pha cũng như trong không gian các tham số. Tuy nhiên, việc chuyển trực tiếp từ các định lí Lyapunov sang các phương trình vi phân hàm chứa xung dẫn đến những khó khăn đáng kể khi phải xác định dấu của đạo hàm của hàm Lyapunov đối với hệ thống. Điều này phải dùng đến kĩ thuật Razumikhin [4], tức là đạo hàm của hàm Lyapunov sẽ được ước tính bằng các phần tử của tập con tối thiểu của đường cong tích phân đối với các hệ được nghiên cứu. Như vậy, với sự hiện diện của các xung cũng như thời gian trễ trong các phương trình vi phân hàm chứa xung đòi hỏi có sự kết hợp liên tục giữa phương pháp hàm Lyapunov và kĩ thuật Razumikhin. Đây là phương pháp rất phù hợp để nghiên cứu tính ổn định của các mạng ứng dụng như mạng nơron nhân tạo và đạt được nhiều kết quả giá trị. Tuy nhiên, do tính chất đặc trưng của nghiệm của hệ chứa xung biến thiên là chỉ liên tục trong khoảng thời gian nằm giữa hai xung liên tiếp và gián đoạn tại thời điểm xung nên khi nghiên cứu lớp hệ này gặp rất nhiều khó khăn vì phải dùng kĩ thuật xử lý đánh giá rất phức tạp. Cho đến nay, các kết quả nghiên cứu về tính ổn định của mạng nơron chứa xung nói chung vẫn còn khá hạn chế, chủ yếu tập trung vào mô hình mạng nơron Hopfield [6], [7] và Cohen-Grossberg. Những bài toán nghiên cứu tính ổn định của nghiệm của một số mạng nơron biến thể mở rộng của mạng Hopfield như mạng nơron trong mô hình bộ nhớ hai chiều kết hợp [2] dưới sự ảnh hưởng của trễ và xung biến thiên hầu như rất ít kết quả công bố.

Bài báo này nghiên cứu một lớp mạng nơron đã và đang được các nhà khoa học quan tâm, đó là mạng nơron bộ nhớ hai chiều kết hợp dưới tác động của trễ và xung biến thiên. Nhiều công bố đã chỉ ra rằng, lớp mạng này ứng dụng thành công trong nhiều bài toán về nhận dạng, xử lí tín hiệu và trí tuệ nhân tạo. Đến nay, bài toán nghiên cứu tính chất định tính của loại hệ này vẫn là vấn đề có tính thời sự, còn nhiều hướng mở cần phát triển nghiên cứu thêm.

2. Kiến thức nền tảng

a. Khái niệm phương trình vi phân hàm chứa xung

Giả sử gọi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là không gian pha của quá trình tiến hóa trong tự nhiên và kĩ thuật. Không gian Ω chứa các trạng thái của quá trình tiến hóa được xác định bởi n tham số, kí hiệu $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ với chuẩn $\|w\| = (\sum_{i=1}^{n} w_i^2)^{1/2}$. Điểm $\mathcal{W}_t$ biểu diễn quá trình tiến hóa tại thời điểm t, xác định bởi $\mathcal{W}_t = (t, w(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Tập $\mathbb{R} \times \Omega$ được gọi là không gian pha mở rộng của quá trình tiến hóa được xét.

Với $h > 0$, xét tập $\mathcal{D} \subset C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ xác định $\mathcal{D} = \{\varphi: [-h, 0] \longrightarrow \Omega\}$, hàm $w_t \in \mathcal{D}$ được xác định $w_t(s) = w(t + s), s \in [-h, 0]$. Giả sử quy luật tiến hóa của quá trình được xác định bởi phương trình vi phân hàm sau đây:

$$w'(t) = H(t, w_t), \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

ở đó $t_0 \in \mathbb{R}$, $w(t) \in \Omega$, H: $[t_0, \infty) \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$.

Toán tử $A_t: P_t \to Q_t$ với hai tập hợp P_t, Q_t là các cấu trúc liên kết bất kì chứa trong $\mathbb{R} \times \Omega$. Với điều kiện đầu $\varphi_0 \in \mathcal{D}, w_{t_0} = \varphi_0(0), w(t_0) = \varphi_0(0)$, sự chuyển động của điểm $\mathcal{W}_t$ trong không gian pha mở rộng được mô tả như sau: $\mathcal{W}_t$ bắt đầu chuyển động từ điểm $(t_0, w(t_0))$ dọc theo đường cong $(t, w(t))$ là nghiệm của hệ (1) với điều kiện đầu $w_{t_0} = \varphi_0(0), w(t_0) = \varphi_0(0)$ đến thời điểm $t_1 > t_0$ khi điểm $\mathcal{W}_t$ gặp tập hợp P_t. Tại thời điểm t_1, toán tử A_{t_1} ngay lập tức chuyển giao điểm $\mathcal{W}_t$ từ vị trí $\mathcal{W}_{t_1} = \big(t_1, w(t_1)\big)$ đến vị trí $(t_1, w_1^+) \in Q_{t_1}, w_1^+ = A_{t_1} w(t_1)$. Sau đó, điểm $\mathcal{W}_t$ tiếp tục di chuyển dọc theo đường cong $(t, y(t))$ được mô tả bởi nghiệm $y(t)$ của hệ (1) với điều kiện đầu $y(t) = w(t), t_1 - h \le t \le t_1$ và $y(t_1) = w_1^+$ cho đến cuộc gặp mới với tập P_t, v.v.

Khi đó, phương trình vi phân (1) và toán tử A_t được gọi là hệ phương trình vi phân hàm có xung, đường cong mô tả bởi điểm $\mathcal{W}_t$ trong không gian pha mở rộng chính là đường cong tích phân và hàm xác định đường cong này là một nghiệm của hệ phương trình vi phân hàm chứa xung. Tại thời điểm $t_1, t_2, \ldots$, khi điểm $\mathcal{W}_t$ gặp tập hợp P_t được gọi là các thời điểm hiệu ứng xung hay nói gọn là các thời điểm xung. Toán tử $A_t: P_t \to Q_t$ được gọi là toán tử "nhảy", ta có thể hiểu A_t diễn tả sự thay đổi đột ngột của trạng thái tại thời điểm xung. Qua phân tích trên, rõ ràng nghiệm $w(t)$ của hệ chứa xung là hàm liên tục trái tại các thời điểm xung, tức là $(t_k^-) = w(t_k), k = 1, 2, \ldots$. Nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng, mỗi sự lựa chọn các tập hợp P_t, Q_t và toán tử A_t sẽ dẫn đến sự biến hóa lớn trong các phương trình vi phân chứa xung.

b. Tính ổn định tiệm cận của phương trình vi phân hàm chứa xung

Phần này trình bày kết quả chính về tính ổn định tiệm cận toàn cục của nghiệm không đối với hệ phương trình vi phân hàm chứa xung.

Kí hiệu V_0 là tập các hàm $V: [t_0, \infty] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ liên tục từng phần thỏa mãn $V(t, 0) = 0$. Với $V \in V_0$, $t \ge 0$, ta định nghĩa tập hợp $\Omega_1 = \{w \in PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big]: V\big(s, w(s)\big) \le V\big(t, w(t)\big), t - h \le s \le t\}$. Gọi $\mathcal{F} = \{f \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]: f(r)$ là hàm tăng ngặt và $f(0) = 0\}$. Xét phương trình vi phân hàm với nhiễu xung tại các thời điểm cố định sau:

$$\begin{cases} w'(t) = H(t, w_t), \quad t \ne t_k, \quad t \ge 0, \\ \Delta w(t_k) = K_k\big(w(t_k)\big), t = t_k, \ k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

ở đó $H: [t_0, \infty) \times PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big] \to \mathbb{R}^n$, $\Delta w(t_k) = w(t_k^+) - w(t_k)$, hàm $K_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \ldots$ là hàm liên tục thỏa mãn $K_k(0) = 0$. Giả sử chuỗi các thời điểm xung thỏa mãn $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$ và $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = \infty$. Giả sử rằng $H(t, 0) = 0$, khi đó phương trình vi phân hàm $w'(t) = H(t, w_t)$ có nghiệm $w(t) = 0$.

Với $\varphi_0 \in PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big]$, kí hiệu $w(t) = w(t;\ t_0, \varphi_0)$ là nghiệm của hệ (2) thỏa mãn điều kiện đầu

$$\begin{cases} w(t) = \varphi_0(t - t_0), \quad t_0 - h \le t \le t_0, \\ w(t_0 + 0;\ t_0, \varphi_0\ ) = \varphi_0(0). \end{cases} \tag{3}$$

Ta có các định lí sau đây.

Định lí 1 ([5]). *Giả sử hàm H liên tục Lipschitz địa phương theo biến thứ hai trên* $[t_0,\infty)\times PC\big[[-h,0],\mathbb{R}^n\big], H(t,0)=0$ *và tồn tại một hằng số m sao cho* $\|H(t,w_t)\|\le m<\infty$ *với* $(t,w_t)\in[t_0,\infty)\times PC\big[[-h,0],\mathbb{R}^n\big]$. *Tồn tại hàm số* $V(t,w(t))\in V_0$ *với* $V(t,0)=0, t\ge t_0$ *thỏa mãn*

$$f(\|w(t)\|)\le V\big(t,w(t)\big),\ f\in\mathcal{F},\ \big(t,w(t)\big)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$V\Big(t+0,w(t)+K_k\big(w(t)\big)\Big)\le V\big(t,w(t)\big),\ \ w(t)\in\mathbb{R}^n, t=t_k, k=1,2,\dots, \tag{5}$$

và bất đẳng thức

$$D^+V\big(t,w(t)\big)\le -cV\big(t,w(t)\big), t\ne t_k, k=1,2,\dots \tag{6}$$

đúng với mọi $t\in[t_0,\infty), w(t)\in\Omega_1$ và $c\in\mathbb{R}^+$. *Khi đó, nghiệm không của hệ (2) là ổn định tiệm cận toàn cục.*

Chứng minh. Xem Phụ lục 1.

Định lí 2 ([5]). *Giả sử hàm H liên tục Lipschitz địa phương theo biến thứ hai trên* $[t_0,\infty)\times PC\big[[-h,0],\mathbb{R}^n\big], H(t,0)=0$ *và tồn tại một hằng số m sao cho* $\|H(t,w_t)\|\le m<\infty$ *với* $(t,w_t)\in[t_0,\infty)\times PC\big[[-h,0],\mathbb{R}^n\big]$. *Tồn tại hàm số* $V(t,w(t))\in V_0$ *với* $V(t,0)=0, t\ge t_0$, *sao cho điều kiện (5) được thỏa mãn,*

$$a(\|w(t)\|)\le V\big(t,w(t)\big)\le b(\|w(t)\|),\ \big(t,w(t)\big)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

ở đó $a(.),b(.)\in\mathcal{F}, a(s)\to\infty$ *khi* $s\to\infty$ *và bất đẳng thức*

$$D^+V\big(t,w(t)\big)\le -f(\|w(t)\|),\ t\ne t_k, k=1,2,\dots \tag{8}$$

đúng với mọi $t\in[t_0,\infty), w(t)\in\Omega_1$ và $f(.)\in\mathcal{F}$. *Khi đó, nghiệm không của hệ (2) là ổn định tiệm cận toàn cục đều.*

Chứng minh. Xem Phụ lục 2.

3. Bài toán ổn định tiệm cận của mạng nơron bộ nhớ hai chiều kết hợp với trễ và xung biến thiên

a. Mô tả sơ bộ bài toán

Xét lớp mạng bộ nhớ hai chiều kết hợp sau đây

$$\begin{cases} \boldsymbol{w_i'(t)=-a_iw_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ji}f_j\left(y_j\big(t-\tau_{ji}\big)\right)+I_i,\ \ t\ne t_k} \\ \boldsymbol{y_j'(t)=-c_jy_j(t)+\sum_{i=1}^{m}d_{ij}g_i\left(w_i\big(t-\sigma_{ij}\big)\right)+J_j,\ \ t\ne t_k} \\ \boldsymbol{\Delta w_i(t_k)=U_{ik}\big(w_i(t_k)\big),\ \ \Delta y_j(t_k)=V_{jk}\left(y_j(t_k)\right),\ \ k=1,2,\dots,} \end{cases} \tag{9}$$

với $t\ge0; i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, trong đó m,n tương ứng là số nơron trong phương trình thứ nhất (lớp mạng thứ nhất) và phương trình thứ hai (lớp mạng thứ hai) của hệ (9); $w_i(t), y_j(t)$ là các biến mô tả trạng thái của nơron thứ i và thứ j tương ứng tại thời điểm t so với trạng thái cân bằng; a_i, c_j là các hằng số dương mô tả tốc độ tự ức chế của các nơron

thứ i và thứ j, đó là tốc độ mà nơron tự giải phóng năng lượng của nó tới trạng thái cân bằng khi ngắt kết nối hoàn toàn từ các nơron khác và từ bên ngoài; các trễ thời gian τ_{ji}, σ_{ij} là các hằng số không âm; b_{ji}, d_{ij} các trọng số kết nối giữa các nơron; $f_j(.), g_i(.)$ là các hàm số kích hoạt nơron; I_i, J_j là các tín hiệu đầu vào từ bên ngoài mô tả tác nhân bên ngoài tác động tới nơron thứ i và thứ j tương ứng; các hàm số $U_{ik}(.), V_{jk}(.)$ biểu diễn sự thay đổi đột ngột của trạng thái nơron tại thời điểm xung t_k; và dãy $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là tăng ngặt: $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$ sao cho $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$.

Với $\varphi \in PC\big[[-\sigma, 0], \mathbb{R}^m\big], \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ và $\phi \in PC\big[[-\tau, 0], \mathbb{R}^n\big]$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$. Kí hiệu $x(t) = \big(w(t), y(t)\big)^T = \big(w(t; 0, \varphi), y(t; 0, \phi)\big)^T \in \mathbb{R}^{m+n}$ với $\big(w(t; 0, \varphi), y(t; 0, \phi)\big)^T = (w_1(t; 0, \varphi), \dots, w_m(t; 0, \varphi), y_1(t; 0, \phi), \dots,)y_n(t; 0, \phi))^T$ là nghiệm của hệ (9) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} w_i(t; 0, \varphi) = \varphi_i(t), & -\sigma \le t \le 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ y_j(t; 0, \phi) = \phi_j(t), & -\tau \le t \le 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ w_i(0^+, 0, \varphi) = \varphi_i(0), & y_j(0^+, 0, \phi) = \phi_j(0), \end{cases} \tag{10}$$

ở đó $\tau = \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \tau_{ji}$ và $\sigma = \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \sigma_{ji}$.

Tại các thời điểm xung $t_k, k = 1, 2, \dots,$ các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{cases} w_i(t_k + 0) = w_i(t_k) + U_{ik}\big(w_i(t_k)\big), & i = \overline{1, m} \\ y_j(t_k + 0) = y_j(t_k) + V_{jk}\left(y_j(t_k)\right), & j = \overline{1, n} \\ w_i(t_k - 0) = w_i(t_k),\ y_j(t_k - 0) = y_j(t_k), & k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{11}$$

Trong phần này, ta định nghĩa $\|z\| = (\sum_{l=1}^{m+n} z_l^2)^{1/2}$ là chuẩn của vectơ $z \in \mathbb{R}^{m+n}$. Ta đưa vào các giả thiết sau đây.

(A1) Tồn tại các hằng số $F_j > 0, j = 1,2, \dots, n$ và $G_i > 0, i = 1,2, \dots, m$ sao cho

$\big|f_j(x) - f_j(y)\big| \le F_j|x - y|, \quad |g_i(x) - g_i(y)| \le G_i|x - y|$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(A2) Các hàm số $U_{ik}(.), V_{jk}(.)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$.

(A3) $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$ và $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$.

(A4) Tồn tại duy nhất một điểm cân bằng

$$x^* = (w^*, y^*) = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$$

của hệ (9) sao cho

$$a_i w_i^* = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j\big(y_j^*\big) + I_i, \qquad c_j y_j^* = \sum_{i=1}^{m} d_{ij} g_i(w_i^*) + J_j,$$

$$U_{ik}(w_i^*) = 0, \quad V_{jk}\big(y_j^*\big) = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots .$$

b. Điều kiện ổn định tiệm cận toàn cục

Kí hiệu

$$w(t) = \big(w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)\big)^T, \quad y(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big)^T,$$

$$f(t-\tau) = (f_j(y_j(t-\tau_{ji})))_{n\times m}, \quad g(t-\sigma) = (g_i(w_i(t-\sigma_{ij})))_{m\times n},$$

$$A = diag(a_1, a_2, \dots, a_m), C = diag(c_1, c_2, \dots, c_n), B = (b_{ji})_{n\times m}, \ D = \ (d_{ij})_{m\times n},$$

$$F = diag(F_1, F_2, \dots, F_n), \quad G = diag(G_1, G_2, \dots, G_m),$$

$$I = (I_1, I_2, \dots, I_m)^T, \quad J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T,$$

$\lambda_{min}(P)$ là giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận P, $\lambda_{max}(P)$ là giá trị riêng lớn nhất của ma trận P, $\|P\| = [P^tP]^{\frac{1}{2}}$ là chuẩn của ma trận P. Ta có kết quả sau đây.

Định lí 3. *Với các giả thiết **(A1)-(A4)**, tồn tại các ma trận đối xứng, xác định dương $P_1 \in \mathbb{R}_{m\times m}$ và $P_2 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ sao cho*

$$-2\lambda_{min}(AP_1) + \|B\|\|F\|\|P_1\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_1)+\lambda_{min}(P_2)}{\lambda_{min}(P_2)}\right) + \|D\|\|G\|\|P_2\|\frac{\lambda_{max}(P_1)}{\lambda_{min}(P_2)} \le -l_1,$$

$$-2\lambda_{min}(CP_2) + \|D\|\|G\|\|P_2\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_2)+\lambda_{min}(P_1)}{\lambda_{min}(P_1)}\right) + \|B\|\|F\|\|P_1\|\frac{\lambda_{max}(P_2)}{\lambda_{min}(P_2)} \le -l_2, \quad (12)$$

ở đó l_1, l_2 là các hằng số dương. Hơn nữa, giả sử hàm số U_{ik} và V_{jk} được xác định như sau

$$U_{ik}\big(w_i(t_k)\big) = -\gamma_{ik}(w_i(t_k) - w_i^*), \ \ 0 < \gamma_{ik} < 2, i = \overline{1,m},$$

$$V_{jk}\left(y_j(t_k)\right) = -\sigma_{jk}\big(y_j(t_k) - y_j^*\big), \ \ 0 < \sigma_{jk} < 2, j = \overline{1,n}, k = 1, 2, \dots. \quad (13)$$

Khi đó, điểm cân bằng x^* của hệ (9) là ổn định tiệm cận toàn cục đều.

Chứng minh. Đặt $u(t) = w(t) - w^*, v(t) = y(t) - y^*$. Ta xét hệ sau đây

$$\begin{cases} u_i'(t) = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ji}\left[f_j\left(y_j^* + v_j\big(t-\tau_{ji}\big)\right) - f_j\big(y_j^*\big)\right], \ \ t \ne t_k, \\ v_j'(t) = -c_j v_j(t) + \sum_{i=1}^m d_{ij}\left[g_i\left(w_i^* + u_i\big(t-\sigma_{ij}\big)\right) - g_i(w_i^*)\right], \ \ t \ne t_k \\ \Delta u_i(t_k) = K_{ik}\big(u_i(t_k)\big), \ \ \Delta v_j(t_k) = H_{jk}\left(v_j(t_k)\right), \ \ k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (14)$$

ở đó $K_{ik}\big(u_i(t_k)\big) = U_{ik}(u_i(t_k) + w_i^*)$ và $H_{jk}\left(v_j(t_k)\right) = V_{jk}\big(v_j(t_k) + y_j^*\big)$.

Ta xây dựng hàm Lyapunov sau đây

$$V\big(t, u(t), v(t)\big) = u^T(t)P_1u(t) + v^T(t)P_2v(t). \quad (15)$$

Với $t = t_k$, từ (13), ta có

$$V\big(t_k + 0, u(t_k + 0), v(t_k + 0)\big)$$

$$= u^T(t_k+0)P_1u(t_k+0) + v^T(t_k+0)P_2v(t_k+0)$$

$$= \big((1-\gamma_{1k})u_1(t_k), \dots, (1-\gamma_{mk})u_m(t_k)\big)^T P_1 \big((1-\gamma_{1k})u_1(t_k), \dots, (1-\gamma_{mk})u_m(t_k)\big)$$

$$+\big((1-\sigma_{1k})v_1(t_k), \dots, (1-\sigma_{nk})v_n(t_k)\big)^T P_2 \big((1-\sigma_{1k})v_1(t_k), \dots, (1-\sigma_{nk})v_n(t_k)\big)$$

$$< u^T(t_k)P_1u(t_k) + v^T(t_k)P_2v(t_k)$$

$$= V\big(t_k, u(t_k), v(t_k)\big),\ k = 1, 2, \dots . \tag{16}$$

Với $t \geq 0$ và $t \neq t_k$, từ giả thiết (A1), lấy đạo hàm Dini trên vế phải $D^+V(t, u(t), v(t))$ của hàm $V(t, u(t), v(t))$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (14), ta có

$$D^+V\big(t, u(t), v(t)\big) = u'^T(t)P_1u(t) + u^T(t)P_1u'(t) + v'^T(t)P_2v(t) + v^T(t)P_2v'(t)$$

$$\leq (-Au(t) + BFv(t-\tau)\ )^T P_1u(t) + u'(t)P_1(-Au(t) + BFv(t-\tau))$$

$$+(-Cv(t) + DGu(t-\sigma)\ )^T P_2v(t) + v'(t)P_2(-Cv(t) + DGu(t-\sigma)). \tag{17}$$

Vì

$$\lambda_{min}(AP_1)\|u(t)\|^2 \leq\ u^T(t)AP_1u(t)\ \leq\ \lambda_{max}(AP_1)\|u(t)\|^2,$$

$$\lambda_{min}(CP_2)\|v(t)\|^2 \leq\ v^T(t)CP_2v(t)\ \leq\ \lambda_{max}(CP_2)\|v(t)\|^2,$$

nên từ (17), với $t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ ta thu được

$$D^+V\big(t, u(t), v(t)\big) = -2\lambda_{min}(AP_1)\|u(t)\|^2 - 2\lambda_{min}(CP_2)\|v(t)\|^2$$

$$+2\|B\|\|F\|\|P_1\|\|v(t-\tau)\|\|u(t)\| + 2\|D\|\|G\|\|P_2\|\|u(t-\sigma)\|\|v(t)\|$$

$$\leq -2\lambda_{min}(AP_1)\|u(t)\|^2 - 2\lambda_{min}(CP_2)\|v(t)\|^2$$

$$+\|B\|\|F\|\|P_1\|(\|v(t-\tau)\|^2 + \|u(t)\|^2) + \|D\|\|G\|\|P_2\|(\|u(t-\sigma)\|^2 + \|v(t)\|^2). \tag{18}$$

Mặt khác, đối với hàm $V(t, u(t), v(t))$, ta luôn có $\lambda_{min}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{min}(P_2)\|v(t)\|^2 \leq\ u^T(t)P_1u(t) + v^T(t)P_2v(t)$

$$\leq \lambda_{max}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{max}(P_2)\|v(t)\|^2,\ t \geq 0, \tag{19}$$

nên với $u(t), v(t)$ thỏa mãn

$$V\big(s, u(s), v(s)\big) \leq V\big(t, u(t), v(t)\big), \quad t - \max\{\tau, \sigma\} \leq s \leq t,$$

ta có

$$\lambda_{min}(P_1)\|u(s)\|^2 + \lambda_{min}(P_2)\|v(s)\|^2\ \leq\ u^T(s)P_1u(s) + v^T(s)P_2v(s)$$

$$\leq u^T(t)P_1u(t) + v^T(t)P_2v(t)$$

$$\leq \lambda_{max}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{max}(P_2)\|v(t)\|^2. \tag{20}$$

Do đó, từ (20), với $t - \max\{\tau, \sigma\} \leq s \leq t, t \geq 0$, ta thu được

$$\|u(s)\|^2 \leq \frac{\lambda_{max}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{max}(P_2)\|v(t)\|^2}{\lambda_{min}(P_1)}$$

$$\|v(s)\|^2 \leq \frac{\lambda_{max}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{max}(P_2)\|v(t)\|^2}{\lambda_{min}(P_2)}. \quad (21)$$

Vậy, từ (18) và (21), với $t \neq t_k, k = 1, 2, \ldots$ ta có đánh giá sau

$$D^+V(t, u(t), v(t)) \leq -2\lambda_{min}(AP_1)\|u(t)\|^2 - 2\lambda_{min}(CP_2)\|v(t)\|^2$$
$$+\|B\|\|F\|\|P_1\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{max}(P_2)\|v(t)\|^2}{\lambda_{min}(P_2)} + \|u(t)\|^2\right)$$
$$+\|D\|\|G\|\|P_2\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_1)\|u(t)\|^2 + \lambda_{max}(P_2)\|v(t)\|^2}{\lambda_{min}(P_1)} + \|v(t)\|^2\right).$$

Do đó,

$$D^+V(t, u(t), v(t))$$
$$\leq \left[-2\lambda_{min}(AP_1) + \|B\|\|F\|\|P_1\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_1) + \lambda_{min}(P_2)}{\lambda_{min}(P_2)}\right) + \|D\|\|G\|\|P_2\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_1)}{\lambda_{min}(P_1)}\right)\right]\|u(t)\|^2$$
$$+\left[-2\lambda_{min}(CP_2) + \|D\|\|G\|\|P_2\|\left(\frac{\lambda_{min}(P_1) + \lambda_{max}(P_2)}{\lambda_{min}(P_1)}\right) + \|B\|\|F\|\|P_1\|\left(\frac{\lambda_{max}(P_2)}{\lambda_{min}(P_2)}\right)\right]\|v(t)\|^2 \quad (22)$$

Từ (22), kết hợp với điều kiện (12) của định lí, cuối cùng ta thu được

$$D^+V(t, u(t), v(t)) \leq -l_1\|u(t)\|^2 - l_2\|v(t)\|^2, t \neq t_k, k = 1, 2, \ldots .$$

Như vậy, tất cả các điều kiện của Định lí 2 được thỏa mãn, suy ra nghiệm không của hệ (14) là ổn định tiệm cận toàn cục đều. Điều này có nghĩa rằng điểm cân bằng x^* của hệ (9) là ổn định tiệm cận toàn cục đều. Định lí được chứng minh.

4. Kết luận

Bài báo đã nghiên cứu tính ổn định của một lớp mạng nơron bộ nhớ hai chiều kết hợp với trễ thời gian dưới tác động của nhiễu xung biến thiên (9). Bằng cách xây dựng một hàm Lyapunov hợp lí, một điều kiện đủ đã thu được trong Định lí 3 đảm bảo điểm cân bằng x^* của hệ (9) ổn định tiệm cận toàn cục đều. Đối với hệ (9), bài toán nghiên cứu tính ổn định có thể được phát triển theo nhiều hướng khác như trễ thời gian biến thiên theo t hoặc các tham số mô hình thuộc vào một khoảng nhưng không xác định cũng là những vấn đề rất thú vị cần nghiên cứu sâu hơn.

Phụ lục 1: ***Chứng minh Định lí 1.***

Với $\varepsilon > 0$, từ tính chất của hàm V, tồn tại hằng số $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ sao cho $w \in$

$\mathbb{R}^n$: $\|w\| < \delta$, thì $sup_{\|w\|<\delta} V(t_0 + 0, w) < f(\varepsilon)$. Gọi $\varphi_0 \in PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big]$: $\|\varphi_0\| < \delta$ và $w(t) = w(t; t_0, \varphi_0)$ là nghiệm của bài toán (2)-(3), $w(t)$ xác định trên khoảng $[t_0, \infty)$.

Từ giả thiết (5), (6), áp dụng [5, Hệ quả 1.25, trang 29], ta có

$$V\big(t, w(t; t_0, \varphi_0)\big) \le V\big(t_0 + 0, \varphi_0(0)\big),\ t \in [t_0, \infty). \quad (23)$$

vì $\|\varphi_0(0)\| \le \|\varphi_0\| < \delta$ nên $V\big(t_0 + 0, \varphi_0(0)\big) < f(\varepsilon)$. Do đó, theo (4), ta thu được

$$f(\|w(t; t_0, \varphi_0)\|) \le V\big(t, w(t; t_0, \varphi_0)\big) \le V\big(t_0 + 0, \varphi_0(0)\big) < f(\varepsilon), \quad (24)$$

điều này dẫn đến $\|w(t; t_0, \varphi_0)\| < \varepsilon, t \ge t_0$. Vậy, nghiệm không của hệ (2) là ổn định.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh nghiệm không của hệ (2) là hút toàn cục. Thật vậy, chọn hằng số $\alpha > 0$ bất kì và $\varphi_0 \in PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big]$: $\|\varphi_0\| < \alpha$. Từ điều kiện (5), (6) của Định lí 1, ta có

$$V\big(t, w(t; t_0, \varphi_0)\big) \le V\big(t_0 + 0, \varphi_0(0)\big)e^{-c(t-t_0)}. \quad (25)$$

Đặt $M(t_0, \alpha) = \sup\{V(t_0 + 0, w)$: $\|w\| \le \alpha\}$ và $\beta = \beta(t_0, \alpha, \varepsilon) > \frac{1}{c} ln\left(\frac{M(t_0,\alpha)}{f(\varepsilon)}\right)$. Khi đó, từ (25), với $t \ge t_0 + \beta$, ta có

$$V\big(t, w(t; t_0, \varphi_0)\big) < f(\varepsilon).$$

Bất đẳng thức này kết hợp với (4), ta thực sự thu được

$\|w(t; t_0, \varphi_0)\| < \varepsilon$.

Vậy, nghiệm không của hệ (2) là hút toàn cục. Tóm lại, ta đã chứng minh được nghiệm $w(t) = 0$ của hệ (2) là ổn định tiệm cận toàn cục. Định lí được chứng minh.

Phụ lục 2: ***Chứng minh Định lí 2.***

Trước hết, ta chứng minh nghiệm không của hệ (2) là ổn định đều. Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ bất kì, ta chọn $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $b(\delta) < a(\varepsilon)$. Tương tự cách chứng minh Định lí 1, với $\varphi_0 \in PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big]$: $\|\varphi_0\| < \delta$ và $w(t) = w(t; t_0, \varphi_0)$ là nghiệm của bài toán (2)-(3), khi đó, $w(t)$ xác định trên khoảng $[t_0, \infty)$.

Từ điều kiện (7), (8) và (5), ta có đánh giá

$$a(\|w(t; t_0, \varphi_0)\|) \le V\big(t, w(t; t_0, \varphi_0)\big) \le V\big(t_0 + 0, \varphi_0(0)\big) \le b(\|\varphi_0(0)\|) \le b(\|\varphi_0\|) < b(\delta) < a(\varepsilon). \quad (26)$$

Suy ra, $\|w(t; t_0, \varphi_0)\| < \varepsilon, \forall\ t \ge t_0$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh mọi nghiệm của hệ (2) là bị chặn đều. Lấy $\alpha > 0$ bất kì và $\varphi_0 \in PC\big[[-h, 0], \mathbb{R}^n\big]$: $\|\varphi_0\| < \alpha$. Do a(.) $\in \mathcal{F}$ và $a(u) \to \infty$ khi $u \to \infty$, ta chọn $\beta = \beta(\alpha) > 0$ sao cho $a(\beta) > b(\alpha)$.

Áp dụng [5, Hệ quả 1.25, trang 29], từ điều kiện (7), (8) của định lí, ta thu được

$$a(\|w(t;t_0,\varphi_0)\|) \le V\big(t,w(t;t_0,\varphi_0)\big) \le V\big(t_0+0,\varphi_0(0)\big)$$
$$\le b(\|\varphi_0(0)\|) \le b(\|\varphi_0\|) < b(\alpha) < a(\beta),\ t \ge t_0. \quad (27)$$

Từ đó dẫn đến, $\|w(t;t_0,\varphi_0)\| < \beta, \forall\, t \ge t_0$. Vậy mọi nghiệm của hệ (2) bị chặn đều.

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh nghiệm không của hệ (2) là hút toàn cục đều. Với $\alpha > 0$ bất kì và $\varepsilon > 0$ cho trước, chọn số $\xi = \xi(\varepsilon) > 0$: $b(\xi) < a(\varepsilon)$. Đặt $\eta = \eta(\alpha,\varepsilon) > 0$ sao cho $\eta > \frac{b(\alpha)}{f(\xi)}$. Gọi $\varphi_0 \in PC\big[[-h,0],\mathbb{R}^n\big]$: $\|\varphi_0\| < \alpha$ và $w(t) = w(t;t_0,\varphi_0)$ là nghiệm của bài toán (2)-(3), $w(t)$ xác định trên khoảng $[t_0,\infty)$. Giả sử với bất kì $t \in [t_0, t_0+\eta]$, bất đẳng thức $\|w(t;t_0,\varphi_0)\| \ge \xi$ thỏa mãn. Theo (5) và (8), ta suy ra

$$V\big(t,w(t;t_0,\varphi_0)\big) \le V\big(t_0+0,\varphi_0(0)\big) - \int_{t_0}^{t} f(\|w(s;t_0,\varphi_0)\|)\,ds$$
$$\le b(\alpha) - f(\xi)\eta < 0. \quad (28)$$

Điều này mâu thuẫn với (7), suy ra, tồn tại $t^* \in [t_0, t_0+\eta]$ sao cho $\|w(t^*;t_0,\varphi_0)\| < \xi$.

Vậy, với $t \ge t^*$ (hay với $t \ge t_0+\eta$ bất kì), ta thu được

$$a(\|w(t;t_0,\varphi_0)\|) \le V\big(t,w(t;t_0,\varphi_0)\big) \le V\big(t^*,w(t^*;t_0,\varphi_0)\big)$$
$$\le b(\|w(t^*;t_0,\varphi_0)\|) < b(\xi) < a(\varepsilon). \quad (29)$$

Suy ra, $\|w(t;t_0,\varphi_0)\| < \varepsilon$ với mọi $t \ge t_0+\eta$. Vậy, nghiệm không của hệ (2) hút toàn cục đều. Định lí được chứng minh hoàn toàn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. T. Hoàn, P. Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định.* NXB Giáo dục, 2003.

[2] B. Kosko, Bidirectional associative memories. *IEEE Trans Syst Man Cybern, SMC-18*, 49-60, 1988.

[3] A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion* (In Russian). Doctoral dissertation, Univ, 1892.

[4] B. S. Razumikhin, *Stability of Systems with Retardation*. Nauka, Moscow, Russian, 1988.

[5] I. Stamova, *Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2009.

[6] L. Sheng, H. Yang, Exponential synchronization of a class of neural networks with mixed time-varying delays and impulsive effects. *Neurocomputing*, 71, 3666–3674, 2008.

[7] I. Stamova, R. Ilarionov, On global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays. *Comput. Math. Appl*., 59, 3508–3515, 2010.

Ngày nhận bài: 08/04/2022 Biên tập xong: 14/11/2022 Duyệt đăng: 14/12/2022