

CHỈNH HÓA BÀI TOÁN GIÁ TRỊ CUỐI CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN BẬC KHÔNG NGUYÊN

Regularization of a Final Value Problem for a System of Nonlinear Time- Fractional Diffusion-Wave Equations

Lê Minh Triết^{(1)*}, Nguyễn Minh Hoàng⁽²⁾

⁽¹⁾Trường Đại học Sài Gòn

⁽²⁾Nghiên cứu sinh, Trường Đại học Sài Gòn

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xét một bài toán giá trị cuối cho hệ phương trình sóng–khuếch tán phi tuyến có đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian sau đây:

$$D_t^\alpha u - \Delta u = F(v), \quad D_t^\alpha v - \Delta v = G(u),$$

trong đó Δ là toán tử Laplace, được xác định trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ có biên đủ trơn, và D_t^α là đạo hàm bậc không nguyên theo nghĩa Caputo với bậc $1 < \alpha < 2$. Với những giả thiết thích hợp đối với các hàm nguồn phi tuyến, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nghiệm cho bài toán trên, đồng thời chỉ ra rằng bài toán là không chỉnh theo nghĩa Hadamard. Cuối cùng, chúng tôi đề xuất một phương pháp chỉnh hóa bằng cắt cụt để xấp xỉ nghiệm của bài toán và ước lượng sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác với tốc độ hội tụ cấp $\sqrt{\varepsilon}$.

Từ khóa: Phương trình khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian; nguồn phi tuyến; tính không chỉnh; bài toán giá trị cuối; hệ khuếch tán bậc không nguyên; bài toán ngược; chỉnh hóa.

Abstract

In this paper, we consider a final value problem for the following time-fractional diffusion-wave system

$$D_t^\alpha u - \Delta u = F(v), \quad D_t^\alpha v - \Delta v = G(u),$$

where Δ denotes the Laplace operator defined on a bounded domain Ω in $\mathbb{R}^d$ with sufficiently smooth boundary and D_t^α refers to the Caputo fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$. Under suitable assumptions on the nonlinear terms and the solution, we prove the existence and uniqueness of a solution to the problem. We also show that the final value problem is ill-posed in the sense of Hadamard. Finally, we propose a truncation regularization method to approximate the solution and derive an error estimate between the regularized solution and the exact solution, with a convergence rate of order $\sqrt{\varepsilon}$.

Keywords: Time-fractional diffusion equation, nonlinear source term, ill-posedness, final value problem, fractional diffusion system, backward problem, regularization.

*Tác giả liên hệ: leminhtriet@sgu.edu.vn

1. Giới thiệu tổng quan

Các phương trình đạo hàm riêng có chứa đạo hàm bậc không nguyên đã nhận được sự quan tâm đáng kể trong nhiều năm qua nhờ vai trò quan trọng của chúng trong việc mô tả các mô hình tự nhiên, bao gồm các quá trình khuếch tán, quá trình ngẫu nhiên, tài chính và thủy văn (xem [1]). Các bài toán thuận, chẳng hạn như bài toán giá trị ban đầu và bài toán giá trị biên ban đầu cho phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên đã được nghiên cứu rộng rãi. Cụ thể, Yamamoto [9] đã nghiên cứu nghiệm yếu cho các bài toán giá trị biên không đồng nhất liên quan đến phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian. Trong [6], Ngọc và cộng sự đã đưa ra dạng nghiệm nhẹ cho một bài toán ngược của phương trình khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian với nguồn phi tuyến, đồng thời chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nghiệm địa phương cho bài toán với $0 < \alpha < 1$.

Trong [10], Phương và các đồng tác giả đã nghiên cứu bài toán giá trị ban đầu cho hệ phương trình sóng–khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên bán tuyến tính theo thời gian, đồng thời khảo sát tính liên tục của nghiệm theo bậc đạo hàm bậc không nguyên.

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) + \mathcal{A}u(x, t) &= F(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ D_t^\alpha v(x, t) + \mathcal{A}v(x, t) &= G(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, t) &= 0, \quad v(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad \partial_t v(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{aligned}$$

với $1 < \alpha < 2$ và $\mathcal{A}$ là một toán tử elliptic đều và đối xứng.

Tuy nhiên, trong các tình huống thực tế, có thể xảy ra trường hợp điều kiện biên, dữ liệu ban đầu, hệ số khuếch tán hoặc nguồn chưa được biết rõ, và khi đó ta cần phục hồi chúng từ các phép đo bổ sung. Các bài toán ngược cho hệ phương trình có chứa đạo hàm bậc không nguyên vẫn còn ít được khám phá. Do bản chất phi địa phương của các đạo hàm bậc không nguyên, các bài toán ngược trong các mô hình này đặc biệt khó khăn. Gần đây, trong [11], chúng tôi đã nghiên cứu bài toán giá trị cuối cho hệ sóng–khuếch tán với hai toán tử elliptic đều tổng quát; kết quả cho một phương trình đơn được trình bày trong [12]. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày chi tiết, với các chứng minh đầy đủ, trường hợp hai toán tử cùng bằng $-\Delta$, cụ thể là bài toán giá trị cuối phi tuyến cho hệ phương trình sóng–khuếch tán có chứa đạo hàm bậc không nguyên theo thời gian sau đây, cùng với các điều kiện tương ứng.

$$D_t^\alpha u(x, t) - \Delta u(x, t) = F(x, t, v(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (1.1a)$$

$$D_t^\alpha v(x, t) - \Delta v(x, t) = G(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (1.1b)$$

$$u(x, t) = 0, \quad v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (1.1c)$$

$$u(x, T) = f(x), \quad \partial_t u(x, T) = \tilde{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1d)$$

$$v(x, T) = g(x), \quad \partial_t v(x, T) = \tilde{g}(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.1e)$$

trong đó miền Ω là một tập con bị chặn của không gian d chiều $\mathbb{R}^d$, với biên $\partial\Omega$ đủ trơn, và $d = 1, 2, 3$ biểu thị số chiều không gian. Các hàm $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}, F, G$ được giả thiết là đã cho và thỏa mãn một số điều kiện sẽ được nêu rõ sau. Với $1 < \alpha < 2$, toán tử D_t^α là đạo hàm bậc không nguyên theo nghĩa Caputo cấp α đối với biến thời gian $t \in (0, T]$ (xem [1, 3]).

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(x, s) ds, \quad 1 < \alpha < 2,$$

và $\Gamma(z)$ ký hiệu cho hàm Gamma chuẩn.

Mục tiêu của chúng tôi là xây dựng dữ liệu ban đầu từ dữ liệu tại thời điểm cuối (f, g) và $(\tilde{f}, \tilde{g})$, từ đó thu được nghiệm của bài toán giá trị cuối. Tuy nhiên, trong thực tế, ta không thể thu nhận được chính xác các dữ liệu (f, g) và $(\tilde{f}, \tilde{g})$, mà chỉ có thể thu được các dữ liệu xấp xỉ $(f^\varepsilon, g^\varepsilon)$ và $(\tilde{f}^\varepsilon, \tilde{g}^\varepsilon)$ sao cho

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{f}^\varepsilon - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} &< \varepsilon, \\ \|g^\varepsilon - g\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{g}^\varepsilon - \tilde{g}\|_{L^2(\Omega)} &< \varepsilon, \end{aligned}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ là sai số của dữ liệu.

Bài báo được tổ chức như sau. Phần 2 trình bày một số kiến thức chuẩn bị. Phần 3 xây dựng dạng nghiệm nhẹ của bài toán (1.1a)–(1.1e). Phần 4 chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm. Phần 5 chứng minh tính không chính của bài toán. Phần 6 đề xuất phương pháp chính hóa chặt cụt phổ và thiết lập đánh giá sai số cấp $\varepsilon^{1/2}$. Phần 7 là kết luận.

2. Một số kiến thức cơ bản

Trong phần này, chúng tôi trình bày lại một số kiến thức trọng tâm được sử dụng trong quá trình hoàn thành bài báo.

Định nghĩa 1. Giả sử $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ là một hệ đầy đủ trực chuẩn các hàm riêng ứng với các trị riêng $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Khi đó, không gian Sobolev $H_0^1(\Omega)$ được định nghĩa như sau

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |\langle v, \phi_n \rangle|^2 < +\infty \right\},$$

với chuẩn tương ứng được cho bởi

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |\langle v, \phi_n \rangle|^2.$$

Định nghĩa 2. Ta định nghĩa

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 |\langle v, \phi_n \rangle|^2 < +\infty \right\},$$

đây là một không gian Hilbert với chuẩn tương ứng được cho bởi

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle v, \phi_n \rangle|^2.$$

Không gian trong Định nghĩa 2 chính là $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, với chuẩn tương đương chuẩn $H^2(\Omega)$ thông thường; để gọn, trong bài báo ta vẫn ký hiệu nó là $H^2(\Omega)$. Tương tự, với $k \in \mathbb{N}$, ta đặt $\mathcal{H}^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega): \|v\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k |\langle v, \phi_n \rangle|^2 < \infty\}$.

Định nghĩa 3. Với $1 \leq p < \infty$, ta định nghĩa không gian $L^p(0, T; H^2(\Omega))$ như sau:

$$L^p(0, T; H^2(\Omega)) = \left\{ v: [0, T] \rightarrow H^2(\Omega), v \text{ là hàm đo được và } \int_0^T \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}^p dt < \infty \right\},$$

với chuẩn tương ứng được cho bởi

$$\|v\|_{L^p(0, T; H^2(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} < +\infty.$$

Khi đó $L^p(0, T; H^2(\Omega))$ là một không gian Banach.

Định nghĩa 4. Khi $v: (0, T) \rightarrow L^2(\Omega)$ và $p = \infty$, ta định nghĩa

$$L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) = \left\{ v: (0, T) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ sao cho } v \text{ là hàm đo được và } \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty \right\},$$

với chuẩn tương ứng

$$\|v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Định nghĩa 5. Với số thực $1 < \alpha < 2$ cho trước, ta định nghĩa không gian $C^\alpha(0, T; H^2(\Omega))$ như sau

$$C^\alpha(0, T; H^2(\Omega)) = \left\{ v \in C(0, T; H^2(\Omega)): \sup_{t \in [0, T]} t^\alpha \|v(t)\|_{H^2(\Omega)} < \infty \right\},$$

với chuẩn tương ứng

$$\|v\|_{C^\alpha(0, T; H^2(\Omega))}^2 = \sup_{t \in (0, T]} t^{2\alpha} \|v(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

Khi đó, không gian giao $\mathbb{V}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega) = C^\alpha(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ cũng là một không gian Banach, với chuẩn được xác định bởi

$$\|v\|_{\mathbb{V}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}^2 = \|v\|_{C^\alpha(0, T; H^2(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2.$$

Định nghĩa 6. Hàm Mittag-Leffler tổng quát được định nghĩa bởi

$$E_{\alpha, \gamma}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)}, \quad x \in \mathbb{C},$$

với các điều kiện $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ và $E_{\alpha,\gamma}(x)$ là một hàm nguyên theo biến $x \in \mathbb{C}$.

Nhận xét 7. Không gian tích $\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0, T; \Omega) = \mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0, T; \Omega) \times \mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0, T; \Omega)$ cũng là một không gian Banach, với chuẩn được xác định bởi

$$\|w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}^2 = \|u\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}^2 + \|v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}^2,$$

trong đó $w = (u, v) \in \mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0, T; \Omega)$.

Bổ đề 1. (xem [1, 4]) Giả sử $1 < \alpha < 2$, $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \pi\alpha$ và γ là một số thực bất kỳ. Khi đó, tồn tại một hằng số dương $C = C(\alpha, \gamma, \mu)$ sao cho

$$|E_{\alpha,\gamma}(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|}, \quad \mu \leq |\arg(x)| \leq \pi.$$

Bổ đề 2. (xem [1, 8]) Giả sử $1 < \alpha < 2$. Khi đó:

(i) Với mỗi $\gamma \in \{1, 2, \alpha, \alpha - 1\}$, tồn tại hằng số $\mathfrak{M} > 0$ (chọn chung cho bốn giá trị của γ) sao cho $|E_{\alpha,\gamma}(-z)| \leq \frac{\mathfrak{M}}{1+z}$ với mọi $z \geq 0$; ngoài ra $|E_{\alpha,\alpha}(-z)| \leq \frac{\mathfrak{M}}{(1+z)^2}$ với mọi $z \geq 0$.

(ii) Đặt $D(z) = E_{\alpha,1}^2(-z) + zE_{\alpha,2}(-z)E_{\alpha,\alpha}(-z)$. Khi đó

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} z^2 D(z) = -\frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma^2(1 - \alpha)},$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-z)}{zD(z)} = -(\alpha - 1)\Gamma(1 - \alpha) > 0.$$

Do đó tồn tại $L_0 > 0$ và $m > 0$ sao cho $|D(z)| \geq \frac{m}{(1+z)^2}$ với mọi $z \geq L_0$.

Chứng minh.

Phần (i) suy ra từ Bổ đề 1 và khai triển tiệm cận

$$E_{\alpha,\beta}(-z) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(z^{-N-1}) \text{ khi } z \rightarrow +\infty \text{ (xem [1]);}$$

với $\beta = \alpha$, số hạng ứng với $k = 1$ bằng 0 nên $E_{\alpha,\alpha}(-z) = O(z^{-2})$.

Phần (ii) suy ra từ cùng khai triển đó: $E_{\alpha,1}(-z) \sim \frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}$, $E_{\alpha,2}(-z) \sim \frac{z^{-1}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $E_{\alpha,\alpha}(-z) \sim -\frac{z^{-2}}{\Gamma(-\alpha)}$ và đẳng thức $\Gamma(2-\alpha)\Gamma(-\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha}\Gamma^2(1-\alpha)$.

Bổ đề 3. (xem [1, 7]) Cho $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2$, $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$ và $\lambda_n > 0$. Khi đó, các đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) &= -\lambda_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha), \\ \frac{\partial}{\partial t} (t E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)) &= E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha), \\ \frac{\partial}{\partial t} (t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)) &= t^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n t^\alpha),\end{aligned}$$

với mọi $t > 0$.

Nhận xét rằng toán tử $-\Delta$ có dãy giá trị riêng không giảm và dương tương ứng là $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa mãn

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots,$$

và $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Ký hiệu $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ trong $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ là các dãy hàm riêng trực chuẩn của toán tử $-\Delta$ trong không gian $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Cụ thể $-\Delta \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x)$ và $\phi_n(x) = 0$, với $x \in \partial\Omega$. Hơn nữa, với mọi $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, ta có khai triển

$$-\Delta v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng chuẩn trong không gian $L^2(\Omega)$ (xem [2]).

Đặt $\Lambda_\Delta = \{T > 0: D(\lambda_n T^\alpha) = 0 \text{ với ít nhất một } n \in \mathbb{N}^*\}$. Trong toàn bộ bài báo, ta giả sử $T \notin \Lambda_\Delta$. Vì $\lambda_n \rightarrow \infty$ nên chỉ có hữu hạn chỉ số n với $\lambda_n T^\alpha < L_0$; kết hợp với Bổ đề 2(ii), sau khi giảm m (nếu cần), ta có

$$|D(\lambda_n T^\alpha)| \geq \frac{m}{(1 + \lambda_n T^\alpha)^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.1)$$

3. Nghiệm nhẹ của bài toán giá trị cuối cho (1.1a)-(1.1e)

Trong phần này, chúng tôi tìm dạng nghiệm nhẹ của bài toán (1.1a)-(1.1e). Giả sử bài toán (1.1a)-(1.1e) có một nghiệm $w = (u, v)$ có dạng

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \phi_n(x), \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \phi_n(x),$$

trong đó $u_n(t) = \langle u(\cdot, t), \phi_n \rangle$ và $v_n(t) = \langle v(\cdot, t), \phi_n \rangle$. Ta có thể biến đổi các phương trình trong bài toán (1.1a)-(1.1b) thành

$$\begin{cases} D_t^\alpha u_n(t) + \lambda_n u_n(t) = F_n(v)(t), & t \in (0, T), \\ D_t^\alpha v_n(t) + \lambda_n v_n(t) = G_n(u)(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $F_n(v)(t) = \langle F(\cdot, t, v(\cdot, t)), \phi_n \rangle$ và $G_n(u)(t) = \langle G(\cdot, t, u(\cdot, t)), \phi_n \rangle$.

Lấy biến đổi Laplace của phương trình (3.1), ta có:

$$\begin{cases} s^\alpha \mathcal{L}\{u_n(t)\} - s^{\alpha-1}u_n(0) - s^{\alpha-2}u'_n(0) \\ \quad + \lambda_n \mathcal{L}\{u_n(t)\} = \mathcal{L}\{F_n(v)(t)\}, \\ s^\alpha \mathcal{L}\{v_n(t)\} - s^{\alpha-1}v_n(0) - s^{\alpha-2}v'_n(0) \\ \quad + \lambda_n \mathcal{L}\{v_n(t)\} = \mathcal{L}\{G_n(u)(t)\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược, khi đó nghiệm của bài toán (3.1) là

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)u_n(0) + tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)u'_n(0) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^\alpha)F_n(v)(s) ds] \phi_n(x), \\ v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)v_n(0) + tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)v'_n(0) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^\alpha)G_n(u)(s) ds] \phi_n(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Từ các giả thiết (1.1d), (1.1e) và Bổ đề 3, ta có

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [P_{\Delta,n}(t)f_n + Q_{\Delta,n}(t)\tilde{f}_n \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^\alpha)F_n(v)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T P_{\Delta,n}(t)(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(T-s)^\alpha)F_n(v)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T Q_{\Delta,n}(t)(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n(T-s)^\alpha) \\ &\quad \times F_n(v)(s) ds] \phi_n(x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [P_{\Delta,n}(t)g_n(x) + Q_{\Delta,n}(t)\tilde{g}_n(x) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^\alpha)G_n(u)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T P_{\Delta,n}(t)(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(T-s)^\alpha)G_n(u)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T Q_{\Delta,n}(t)(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n(T-s)^\alpha) \\ &\quad \times G_n(u)(s) ds] \phi_n(x). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bây giờ, với mọi $v \in L^2(\Omega)$ và $0 \leq t \leq T$, ta đặt

$$P_{\Delta}(t)v = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\Delta,n}(t)v_n\phi_n, \quad \text{với}$$

$$P_{\Delta,n}(t) = \frac{1}{D(\lambda_n T^{\alpha})} [E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha}) + \lambda_n t T^{\alpha-1}E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^{\alpha})E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^{\alpha})], \quad (3.6)$$

$$Q_{\Delta}(t)v = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\Delta,n}(t)v_n\phi_n, \quad \text{với}$$

$$Q_{\Delta,n}(t) = \frac{1}{D(\lambda_n T^{\alpha})} [-E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})TE_{\alpha,2}(-\lambda_n T^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha})tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^{\alpha})], \quad (3.7)$$

$$R_{\Delta}(t)v = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^{\alpha})v_n\phi_n, \quad (3.8)$$

$$\tilde{R}_{\Delta}(t)v = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n t^{\alpha})v_n\phi_n. \quad (3.9)$$

trong đó $D(\cdot)$ được xác định trong Bổ đề 2(ii); mẫu số của $Q_{\Delta,n}(t)$ trong (3.7) cũng chính là $D(\lambda_n T^{\alpha})$.

Khi đó, hệ phương trình (3.4) và (3.5) có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} u(x, t) &= P_{\Delta}(t)f(x) + Q_{\Delta}(t)\tilde{f}(x) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\Delta}(t-s)F(v)(s) ds \\ &- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_{\Delta}(t)R_{\Delta}(T-s)F(v)(s) ds \\ &- \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_{\Delta}(t)\tilde{R}_{\Delta}(T-s)F(v)(s) ds, \end{aligned} \quad (3.10)$$

và

$$\begin{aligned} v(x, t) &= P_{\Delta}(t)g(x) + Q_{\Delta}(t)\tilde{g}(x) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_{\Delta}(t-s)G(u)(s) ds \\ &- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_{\Delta}(t)R_{\Delta}(T-s)G(u)(s) ds \\ &- \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_{\Delta}(t)\tilde{R}_{\Delta}(T-s)G(u)(s) ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bây giờ, ta gọi $w = (u, v) \in \mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0, T; \Omega)$ với $1 < \alpha < 2$ là nghiệm nhẹ của bài toán

(1.1a)–(1.1e) nếu nó thỏa mãn hệ phương trình (3.10) và (3.11).

4. Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm cho bài toán (1.1a)–(1.1e)

Trong bài báo này, chúng tôi cố định một số $p > \frac{1}{\alpha-1}$ và giả thiết rằng các hàm F, G thỏa mãn các giả thiết sau

1. (H₁) Với mọi $w = (u, v) \in \mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)$, các hàm nguồn $F(v)$ và $G(u)$ thuộc không gian $L^p(0, T; H^2(\Omega))$.

2. (H_{2a}) Tồn tại các hàm không âm K^F, K^G trong không gian $L^p(0, T; \mathbb{R})$ sao cho với mọi $(u_1; v_1), (u_2; v_2)$ trong $\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)$ ta có

$$\begin{aligned}\|F(v_1)(\cdot, t) - F(v_2)(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq K^F(t) \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}, \\ \|G(u_1)(\cdot, t) - G(u_2)(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq K^G(t) \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}.\end{aligned}$$

3. (H_{2b}) Tồn tại hằng số dương $C > 0$ sao cho với mọi $w = (u; v)$ thuộc $\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)$

$$\begin{aligned}\|F(v)(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(1 + \|v\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}), \\ \|G(u)(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(1 + \|u\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}).\end{aligned}$$

Ví dụ. Cho $k \in L^\infty(0, T)$. Đặt $F(v)(x, t) = k(t)\sin(\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)})\phi_1(x)$ và $G(u)(x, t) = k(t)\sin(\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)})\phi_1(x)$. Vì $\|\phi_1\|_{H^2(\Omega)} = \lambda_1$

và $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, các giả thiết (H₁)–(H_{2b}) được thỏa mãn với $K^F = K^G = \lambda_1|k|$ và $C = \lambda_1 \|k\|_{L^\infty(0, T)}$.

Tiếp theo, ta có Bổ đề sau trình bày tính bị chặn của các biểu thức (3.6)–(3.9) trên không gian phù hợp.

Bổ đề 4. Giả sử $T \notin \Lambda_\Delta$, các hằng số $\mathfrak{M}, m$ được xác định như trong Bổ đề 2 và (2.1). Đặt

$$\mathfrak{K} = \frac{2\mathfrak{M}^2}{m}, \quad \mathfrak{M}_1 = 2\mathfrak{K}\left(T^\alpha + \frac{1}{\lambda_1}\right), \quad \mathfrak{M}_2 = 2T\mathfrak{K}\left(T^\alpha + \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

Ta có các bất đẳng thức sau

$$\|P_\Delta(t)v\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)} \leq \mathfrak{M}_1 \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad (4.1)$$

$$\|Q_\Delta(t)v\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)} \leq \mathfrak{M}_2 \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad (4.2)$$

$$\|R_\Delta(t)v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \mathfrak{M}^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad (4.3)$$

$$\|\tilde{R}_\Delta(t)v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \mathfrak{M}^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad (4.4)$$

với v thuộc $H^2(\Omega)$.

Chứng minh. Đặt $z_n = \lambda_n T^\alpha$. Từ (3.6), Bổ đề 2(i) và (2.1), với mọi $0 < t \leq T$ ta có

$$\begin{aligned}
|P_{\Delta,n}(t)| &\leq \frac{(1+z_n)^2}{m} \left[\frac{\mathfrak{M}}{1+\lambda_n t^\alpha} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{1+z_n} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_n t^{T\alpha-1} \frac{\mathfrak{M}}{1+\lambda_n t^\alpha} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{(1+z_n)^2} \right] \\
&\leq \frac{\mathfrak{M}^2}{m} \cdot \frac{1+2z_n}{1+\lambda_n t^\alpha} \leq \mathfrak{K} \frac{1+\lambda_n T^\alpha}{1+\lambda_n t^\alpha}.
\end{aligned}$$

Tương tự, từ (3.7),

$$\begin{aligned}
|Q_{\Delta,n}(t)| &\leq \frac{(1+z_n)^2}{m} \left[\frac{\mathfrak{M}}{1+\lambda_n t^\alpha} \cdot \frac{T\mathfrak{M}}{1+z_n} + \frac{t\mathfrak{M}}{1+\lambda_n t^\alpha} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{1+z_n} \right] \\
&\leq T\mathfrak{K} \frac{1+\lambda_n T^\alpha}{1+\lambda_n t^\alpha}.
\end{aligned}$$

Vì $\frac{1+\lambda_n T^\alpha}{1+\lambda_n t^\alpha} \leq 1 + \lambda_n T^\alpha \leq \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_1} + T^\alpha \right)$ và $\frac{1+\lambda_n T^\alpha}{1+\lambda_n t^\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{t^\alpha}$, theo đẳng thức Parseval ta được

$$\begin{aligned}
\|P_\Delta(t)v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \mathfrak{K} \left(\frac{1}{\lambda_1} + T^\alpha \right) \|v\|_{H^2(\Omega)}, \\
t^\alpha \|P_\Delta(t)v\|_{H^2(\Omega)} &\leq \mathfrak{K} T^\alpha \|v\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Do đó $\|P_\Delta(\cdot)v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq \mathfrak{K} \left(2T^\alpha + \frac{1}{\lambda_1} \right) \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathfrak{M}_1 \|v\|_{H^2(\Omega)}$, tức là (4.1).

Lập luận hoàn toàn tương tự với hệ số $T\mathfrak{K}$ thay cho $\mathfrak{K}$ cho ta (4.2). Cuối cùng, theo Bổ đề 2(i), $|E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)| \leq \mathfrak{M}$ và $|E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n t^\alpha)| \leq \mathfrak{M}$, nên

$$\|R_\Delta(t)v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)|^2 \lambda_n^2 |v_n|^2 \leq \mathfrak{M}^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}^2,$$

và tương tự cho $\tilde{R}_\Delta(t)$. Vậy (4.3), (4.4) được chứng minh.

Bây giờ, chúng ta nhắc lại rằng phép nhúng Sobolev $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ dẫn đến việc tồn tại một hằng số dương $C_\Omega > 0$ sao cho $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|_{H^2(\Omega)}$, $\forall v \in H^2(\Omega)$.

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

với mọi $v \in H^2(\Omega)$.

Bổ đề 5. Cho $(f; g) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, $(\tilde{f}; \tilde{g}) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, $p > \frac{1}{\alpha-1}$, $\mathfrak{M}$ được xác định như trong Bổ đề 2, và các hằng số $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ như trong Bổ đề 4, với $T \notin \Lambda_\Delta$, ta đặt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_3 = 3\mathfrak{M} &\left[\left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} (T^\alpha + C_\Omega + \mathfrak{M}_1) \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{M}_2 \left(\frac{p-1}{p\alpha-p-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-1-\frac{1}{p}} \right].
\end{aligned}$$

Khi đó, các bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\begin{aligned}
\|w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq \mathfrak{M}_1(\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}) \\
&+ \mathfrak{M}_2(\|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}) \\
&+ \mathfrak{M}_3\left(\|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} + \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}\right),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

với $w = (u, v)$ là một nghiệm của bài toán (1.1a)–(1.1e).

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 4 và giả thiết (H_1) , ta có thể sử dụng bất đẳng thức Hölder như sau

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \right\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|R_\Delta(t-s)F(v)(\cdot, s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\
&\leq \mathfrak{M} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|F(v)(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\
&\leq \mathfrak{M} \left[\int_0^t (t-s)^{\frac{p}{p-1}(\alpha-1)} ds \right]^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t \|F(v)(\cdot, s)\|_{H^2(\Omega)}^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mathfrak{M} \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\text{Khi đó, } \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \mathfrak{M} \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))},$$

và

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \right\|_{C^\alpha(0,T;H^2(\Omega))} \\
&\leq \mathfrak{M} \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{2\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_\Omega \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \right\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \mathfrak{M} C_\Omega \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathfrak{M} C_\Omega \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))},$$

nên

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s) F(v)(s) ds \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \leq \mathfrak{M} C_\Omega \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Do đó, bằng cách sử dụng các ước lượng trong (4.6), ta thấy rằng

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s) F(v)(s) ds \right\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & = \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s) F(v)(s) ds \right\|_{C^\alpha(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \quad + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s) F(v)(s) ds \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \leq \mathfrak{M} \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} (T^\alpha + C_\Omega) \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \leq \frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tương tự, như trong (4.7), ta cũng thấy rằng

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s) G(u)(s) ds \right\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tiếp theo, chúng tôi tiến hành đánh giá các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t) R_\Delta(T-s) F(v)(s) ds \right\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|P_\Delta(t) R_\Delta(T-s) F(v)(\cdot, s)\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} ds \\ & \leq \mathfrak{M} \mathfrak{M}_1 \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|F(v)(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\ & \leq \mathfrak{M} \mathfrak{M}_1 \left[\int_0^T (T-s)^{\frac{p}{p-1}(\alpha-1)} ds \right]^{1-\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left[\int_0^T \|F(v)(\cdot, s)\|_{H^2(\Omega)}^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \mathfrak{M} \mathfrak{M}_1 \left(\frac{p-1}{p\alpha-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \leq \frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tương tự, như trong (4.9), ta thu được

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t) R_\Delta(T-s) G(u)(s) ds \right\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t) \tilde{R}_\Delta(T-s) F(v)(s) ds \right\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \mathfrak{M}_2 \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} \|F(v)(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \\ & \leq \mathfrak{M}_2 \left(\frac{p-1}{p\alpha-p-1} \right)^{1-\frac{1}{p}} T^{\alpha-1-\frac{1}{p}} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \leq \frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

trong đó tích phân $\int_0^T (T-s)^{(\alpha-2)\frac{p}{p-1}} ds$ hội tụ vì $p > \frac{1}{\alpha-1}$ kéo theo $(\alpha-2)\frac{p}{p-1} > -1$.

Do (4.11), ta cũng thấy rằng

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t) \tilde{R}_\Delta(T-s) G(u)(s) ds \right\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Từ (3.10)–(3.11), (4.7)–(4.12) và Bổ đề 4, ta có

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} & \leq \mathfrak{M}_1 \|f\|_{H^2(\Omega)} + \mathfrak{M}_2 \|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)} \\ & \quad + \mathfrak{M}_3 \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}, \\ \|v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} & \leq \mathfrak{M}_1 \|g\|_{H^2(\Omega)} + \mathfrak{M}_2 \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)} \\ & \quad + \mathfrak{M}_3 \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cuối cùng, ta thu được các ước lượng sau

$$\begin{aligned} \|w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} & = \|u\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} + \|v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \mathfrak{M}_1 (\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}) + \mathfrak{M}_2 (\|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)}) \\ & \quad + \mathfrak{M}_3 (\|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} + \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}). \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức (4.5) đã được chứng minh.

Định lý 8. Cho $(f; g) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, $(\tilde{f}; \tilde{g}) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ các điều kiện (H_1) , (H_{2a}) và (H_{2b}) thỏa mãn

$$\max\{\|K^F\|_{L^p(0,T;\mathbb{R})}; \|K^G\|_{L^p(0,T;\mathbb{R})}\} < \frac{1}{2\mathfrak{M}_3}, \quad (4.14)$$

$$C < \frac{1}{T^{1/p} \mathfrak{M}_3}.$$

Khi đó, bài toán (1.1a)–(1.1e) có một nghiệm duy nhất $w = (u, v) \in \mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)$. Hơn nữa, tồn tại một hằng số dương $\mathfrak{M}_4 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \|w\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)} &\leq \mathfrak{M}_4 (\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Chứng minh. Trước tiên, từ (4.14), ta chọn

$$\begin{aligned} R := & \frac{1}{1 - \mathfrak{M}_3 C T^{1/p}} [\mathfrak{M}_1 (\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}) \\ & + \mathfrak{M}_2 (\|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)}) + \mathfrak{M}_3 C T^{1/p}], \end{aligned}$$

trong đó, chúng ta nhắc lại rằng các hằng số $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ được xác định trong Bổ đề 4 và Bổ đề 5. Ta đặt

$$\mathbf{B}_R := \{w \in \mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega) : \|w\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)} \leq R\} \subset \mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega),$$

và định nghĩa ánh xạ toán tử $\mathbf{S} : \mathbf{B}_R \rightarrow \mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)$ bởi

$$\mathbf{S}w := (\mathbf{S}u; \mathbf{S}v),$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{S}u(x, t) &:= P_\Delta(t)f(x) + Q_\Delta(t)\tilde{f}(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t)R_\Delta(T-s)F(v)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t)\tilde{R}_\Delta(T-s)F(v)(s) ds, \\ \mathbf{S}v(x, t) &:= P_\Delta(t)g(x) + Q_\Delta(t)\tilde{g}(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)G(u)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t)R_\Delta(T-s)G(u)(s) ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t)\tilde{R}_\Delta(T-s)G(u)(s) ds, \end{aligned}$$

với $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ và $w \in \mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)$. Trước tiên, chúng tôi chứng minh rằng ánh xạ $\mathbf{S}$ ánh xạ từ $\mathbf{B}_R$ vào chính nó. Từ giả thiết tăng trưởng (H_{2b}) , ta lưu ý rằng

$$\begin{aligned} \|F(v)(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(1 + \|v\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}), \\ \|G(u)(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(1 + \|u\|_{\mathbb{W}^{\alpha, \infty}(0, T; \Omega)}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

với mọi $t \in (0, T)$. Vì K^F, K^G thuộc không gian $L^p(0, T; \mathbb{R})$ theo giả thiết (H_{2a}) , nên ta suy ra rằng $F(v)$ và $G(u)$ thuộc $L^p(0, T; H^2(\Omega))$, và

$$\begin{aligned} \|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} &\leq \left[\int_0^T \|F(v)(\cdot, s)\|_{H^2(\Omega)}^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq CT^{1/p} (1 + \|v\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} &\leq \left[\int_0^T \|G(u)(\cdot, s)\|_{H^2(\Omega)}^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq CT^{1/p} (1 + \|u\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ta có $(f; g) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ và $(\tilde{f}; \tilde{g}) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$. Do đó, ta có thể áp dụng Bổ đề 5, cụ thể là

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq \mathfrak{M}_1(\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\quad + \mathfrak{M}_2(\|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\quad + \mathfrak{M}_3\left(\|F(v)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} + \|G(u)\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}\right) \\ &\leq \mathfrak{M}_1(\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}) + \mathfrak{M}_2(\|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\quad + \mathfrak{M}_3CT^{1/p}(1 + \|w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}), \end{aligned}$$

với mọi $w \in \mathbf{B}_R$. Vì $|w|\mathbb{W}^{\alpha,\infty} \leq R$, ta có

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq \mathfrak{M}_1(\|f\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\quad + \mathfrak{M}_2(\|\tilde{g}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{f}\|_{H^2(\Omega)}) + \mathfrak{M}_3CT^{1/p}(1 + R). \end{aligned}$$

Do đó, $\|\mathbf{S}w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq R$ tức là, $\mathbf{S}$ ánh xạ quả cầu $\mathbf{B}_R$ vào chính nó. Tiếp theo, chúng tôi sẽ chứng minh rằng $\mathbf{S}$ là một ánh xạ co. Với $w_1 = (u_1, v_1)$ và $w_2 = (u_2, v_2)$ thuộc $\mathbf{B}_R$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{S}u_1(x, t) - \mathbf{S}u_2(x, t) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)[F(v_1)(s) - F(v_2)(s)] ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t) R_\Delta(T-s)[F(v_1)(s) - F(v_2)(s)] ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t) \tilde{R}_\Delta(T-s)[F(v_1)(s) - F(v_2)(s)] ds, \end{aligned}$$

và ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{S}v_1(x, t) - \mathbf{S}v_2(x, t) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)[G(u_1)(s) - G(u_2)(s)] ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t) R_\Delta(T-s)[G(u_1)(s) - G(u_2)(s)] ds \\ &\quad - \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t) \tilde{R}_\Delta(T-s)[G(u_1)(s) - G(u_2)(s)] ds. \end{aligned}$$

Tương tự như cách lập luận trong (4.17) và (4.18), ta thấy rằng

$$\begin{aligned} & \| F(v_1) - F(v_2) \|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \leq \| K^F \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \| v_1 - v_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & \| G(u_1) - G(u_2) \|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \leq \| K^G \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \| u_1 - u_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Do đó, từ các bất đẳng thức (4.7), (4.9), (4.11), (4.19) và (4.20), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{S}u_1 - \mathbf{S}u_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)[F(v_1) - F(v_2)](s) ds \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \quad + \| \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t)R_\Delta(T-s) \\ & \quad \quad \times [F(v_1) - F(v_2)](s) ds \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \quad + \| \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t)\tilde{R}_\Delta(T-s) \\ & \quad \quad \times [F(v_1) - F(v_2)](s) ds \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \mathfrak{M}_3 \| F(v_1) - F(v_2) \|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))} \\ & \leq \mathfrak{M}_3 \| K^F \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \| v_1 - v_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

trong đó, chúng tôi đã sử dụng lập luận tương tự như trong (4.17) và (4.21). Tương tự, ta cũng thu được ước lượng sau

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{S}v_1 - \mathbf{S}v_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \mathfrak{M}_3 \| K^G \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \| u_1 - u_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Kết hợp các bất đẳng thức (4.21) và (4.22) cho ta

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{S}w_1 - \mathbf{S}w_2 \|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & = \| \mathbf{S}u_1 - \mathbf{S}u_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} + \| \mathbf{S}v_1 - \mathbf{S}v_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \leq \mathfrak{M}_3 (\| K^F \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \| v_1 - v_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \\ & \quad + \| K^G \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \| u_1 - u_2 \|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}). \end{aligned}$$

Điều này, cùng với giả thiết (4.14), đảm bảo rằng $\mathbf{S}$ là một ánh xạ co trên $\mathbf{B}_R$. Do đó, bài toán (1.1a)-(1.1e) có nghiệm duy nhất trong $\mathbf{B}_R$.

5. Tính không chỉnh của bài toán (1.1a)-(1.1e)

Trong mục này, chúng tôi chỉ ra rằng bài toán (1.1a)–(1.1e) không chỉnh theo nghĩa Hadamard: nghiệm tại thời điểm $t = 0$ không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu cuối trong chuẩn $L^2(\Omega)$. Vì các giả thiết (H₁)–(H_{2b}) được thỏa mãn với $F = G = 0$, ta chỉ cần chỉ ra điều này trong trường hợp đó.

Mệnh đề 9. *Giả sử $T \notin \Lambda_\Delta$ và $F = G = 0$. Khi đó tồn tại dãy dữ liệu cuối*

$(f^{(n)}, \tilde{f}^{(n)}, g^{(n)}, \tilde{g}^{(n)})$ với nghiệm tương ứng $w^{(n)} = (u^{(n)}, v^{(n)})$ sao cho

$$\begin{aligned} & \|f^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{f}^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} + \|g^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{g}^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \\ & \|u^{(n)}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Chứng minh. Chọn $f^{(n)} = \lambda_n^{-1/2} \phi_n$ và $\tilde{f}^{(n)} = g^{(n)} = \tilde{g}^{(n)} = 0$. Khi $F = G = 0$, từ (3.10)–(3.11) ta có $v^{(n)} = 0$ và $u^{(n)}(x, t) = \lambda_n^{-1/2} P_{\Delta, n}(t) \phi_n(x)$. Vì $E_{\alpha, 1}(0) = 1$, từ (3.6) ta được $P_{\Delta, n}(0) = \frac{E_{\alpha, 1}(-z_n)}{D(z_n)}$ với $z_n = \lambda_n T^\alpha$.

Theo Bổ đề 2(ii), $\frac{E_{\alpha, 1}(-z_n)}{z_n D(z_n)} \rightarrow -(\alpha - 1)\Gamma(1 - \alpha) > 0$, nên tồn tại $c_0 > 0$ và $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|P_{\Delta, n}(0)| \geq c_0 \lambda_n T^\alpha$ với mọi $n \geq n_0$. Suy ra

$$\begin{aligned} \|f^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} &= \lambda_n^{-1/2} \rightarrow 0, \\ \|u^{(n)}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} &= \lambda_n^{-1/2} |P_{\Delta, n}(0)| \geq c_0 T^\alpha \lambda_n^{1/2} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Vậy bài toán (1.1a)–(1.1e) là bài toán không chỉnh theo nghĩa Hadamard trong chuẩn $L^2(\Omega)$.

Nhận xét. Với $t \in (0, T]$ cố định, theo chứng minh Bổ đề 4 ta có $|P_{\Delta, n}(t)| \leq \mathfrak{K} T^\alpha / t^\alpha$ và $|Q_{\Delta, n}(t)| \leq T \mathfrak{K} T^\alpha / t^\alpha$, nên trong trường hợp tuyến tính, ánh xạ từ dữ liệu cuối tới $u(\cdot, t)$ bị chặn trên $L^2(\Omega)$. Tính không chỉnh chỉ xuất hiện tại $t = 0$ và ở mức nhẹ (hệ số khuếch đại cấp λ_n). Điều này cho phép đạt tốc độ hội tụ cấp Hölder trong Mục 6.

6. Chinh hóa và đánh giá sai số của nghiệm bài toán (1.1a)–(1.1e)

Trong mục này, giả sử dữ liệu cuối chính xác thỏa mãn $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} \in \mathcal{H}^4(\Omega)$ và dữ liệu đo $f^\varepsilon, \tilde{f}^\varepsilon, g^\varepsilon, \tilde{g}^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{f}^\varepsilon - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon, \\ \|g^\varepsilon - g\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{g}^\varepsilon - \tilde{g}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Với tham số chinh hóa $N_\varepsilon > 0$, đặt $\mathcal{R}(\varepsilon, \lambda_n) = 1$ nếu $\lambda_n \leq N_\varepsilon$ và $\mathcal{R}(\varepsilon, \lambda_n) = 0$ nếu $\lambda_n > N_\varepsilon$. Ta định nghĩa các toán tử chặt cụt

$$\begin{aligned} P_\Delta^\varepsilon(t)v &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(\varepsilon, \lambda_n) P_{\Delta, n}(t) v_n \phi_n, \\ Q_\Delta^\varepsilon(t)v &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(\varepsilon, \lambda_n) Q_{\Delta, n}(t) v_n \phi_n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Nghiệm chinh hóa $w^\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ được xác định bởi hệ

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(t) &= P_\Delta^\varepsilon(t)f^\varepsilon + Q_\Delta^\varepsilon(t)\tilde{f}^\varepsilon \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} R_\Delta(t-s)F(v^\varepsilon)(s) ds \\
&- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} P_\Delta(t)R_\Delta(T-s)F(v^\varepsilon)(s) ds \\
&- \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} Q_\Delta(t)\tilde{R}_\Delta(T-s)F(v^\varepsilon)(s) ds,
\end{aligned} \tag{6.3}$$

và v^ε được xác định tương tự với $g^\varepsilon, \tilde{g}^\varepsilon$ và $G(u^\varepsilon)$ (ký hiệu là (6.4)). Như vậy, nhân tử chặt cụt tác động lên cả hai số hạng chứa dữ liệu đo.

Bổ đề 10. Với mọi $e \in L^2(\Omega)$ và $h \in \mathcal{H}^4(\Omega)$, ta có

$$\begin{aligned}
\| P_\Delta^\varepsilon(\cdot)e \|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq \mathfrak{K}(1 + 2T^\alpha N_\varepsilon) \| e \|_{L^2(\Omega)}, \\
\| Q_\Delta^\varepsilon(\cdot)e \|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq T\mathfrak{K}(1 + 2T^\alpha N_\varepsilon) \| e \|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
\| (P_\Delta - P_\Delta^\varepsilon)(\cdot)h \|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq \frac{\mathfrak{M}_1}{N_\varepsilon} \| h \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)}, \\
\| (Q_\Delta - Q_\Delta^\varepsilon)(\cdot)h \|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} &\leq \frac{\mathfrak{M}_2}{N_\varepsilon} \| h \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Chứng minh.

Theo chứng minh Bổ đề 4, $|P_{\Delta,n}(t)| \leq \mathfrak{K}(1 + \lambda_n T^\alpha)$ và $t^\alpha \lambda_n |P_{\Delta,n}(t)| \leq \mathfrak{K}T^\alpha \lambda_n$. Khi $\lambda_n \leq N_\varepsilon$, hai đại lượng này lần lượt không vượt quá $\mathfrak{K}(1 + T^\alpha N_\varepsilon)$ và $\mathfrak{K}T^\alpha N_\varepsilon$; theo đẳng thức Parseval ta được bất đẳng thức thứ nhất của (6.5). Bất đẳng thức thứ hai tương tự, với hệ số $T\mathfrak{K}$.

Để chứng minh (6.6), ta áp dụng (4.1), (4.2) cho hàm

$$h - \mathcal{R}h := \sum_n (1 - \mathcal{R}(\varepsilon, \lambda_n)) h_n \phi_n$$

và lưu ý rằng $\| h - \mathcal{R}h \|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{\lambda_n > N_\varepsilon} \lambda_n^2 |h_n|^2 \leq N_\varepsilon^{-2} \| h \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)}^2$.

Định lý 11. Giả sử các giả thiết của Định lý 8 được thỏa mãn, $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} \in \mathcal{H}^4(\Omega)$ và (6.1) đúng.

$$\text{Đặt } \kappa = \max\{\| K^F \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})}, \| K^G \|_{L^p(0,T;\mathbb{R})}\}$$

và $\theta = \mathfrak{M}_1(\| f \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)} + \| g \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)}) + \mathfrak{M}_2(\| \tilde{f} \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)} + \| \tilde{g} \|_{\mathcal{H}^4(\Omega)})$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, hệ (6.3)–(6.4) có nghiệm duy nhất $w^\varepsilon \in \mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)$ và

$$\| w^\varepsilon - w \|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq \frac{2(1+T)\mathfrak{K}(1 + 2T^\alpha N_\varepsilon) \varepsilon + N_\varepsilon^{-1} \theta}{1 - \mathfrak{M}_3 \kappa}. \tag{6.7}$$

Chứng minh.

Sự tồn tại và duy nhất của w^ε được chứng minh như Định lý 8, trong đó số hạng

$$\mathfrak{M}_1(\|f\|_{H^2} + \|g\|_{H^2}) + \mathfrak{M}_2(\|\tilde{f}\|_{H^2} + \|\tilde{g}\|_{H^2})$$

được thay bởi $\mathfrak{K}(1 + 2T^\alpha N_\varepsilon)(\|f^\varepsilon\|_{L^2} + \|g^\varepsilon\|_{L^2} + T\|\tilde{f}^\varepsilon\|_{L^2} + T\|\tilde{g}^\varepsilon\|_{L^2})$ nhờ (6.5); hằng số co vẫn là $\mathfrak{M}_3\kappa < 1$. Trừ (3.10) cho (6.3), ta có

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t) - u(t) = & P_\Delta^\varepsilon(t)(f^\varepsilon - f) + Q_\Delta^\varepsilon(t)(\tilde{f}^\varepsilon - \tilde{f}) \\ & - (P_\Delta - P_\Delta^\varepsilon)(t)f - (Q_\Delta - Q_\Delta^\varepsilon)(t)\tilde{f} + \mathbf{I}(t), \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{I}(t)$ là tổng ba tích phân chứa $F(v^\varepsilon) - F(v)$. Theo (4.7), (4.9), (4.11) và (H_{2a}), $\|\mathbf{I}\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq \mathfrak{M}_3 \|K^F\|_{L^p(0,T;\mathbb{R})} \|v^\varepsilon - v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}$. Kết hợp với (6.1), (6.5), (6.6) ta được

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq & (1+T)\mathfrak{K}(1+2T^\alpha N_\varepsilon)\varepsilon \\ & + N_\varepsilon^{-1}(\mathfrak{M}_1\|f\|_{\mathcal{H}^4(\Omega)} + \mathfrak{M}_2\|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}^4(\Omega)}) \\ & + \mathfrak{M}_3\kappa\|v^\varepsilon - v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Đánh giá tương tự cho $\|v^\varepsilon - v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}$ (6.9). Cộng (6.8) và (6.9), đặt $S = \|u^\varepsilon - u\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} + \|v^\varepsilon - v\|_{\mathbb{V}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)}$, ta có $S \leq 2(1+T)\mathfrak{K}(1+2T^\alpha N_\varepsilon)\varepsilon + N_\varepsilon^{-1}\theta + \mathfrak{M}_3\kappa S$. Vì $\mathfrak{M}_3\kappa < \frac{1}{2}$ và $\|w^\varepsilon - w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq S$, ta suy ra (6.7).

Chú ý 12. Chọn $N_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}$. Khi đó, với $0 < \varepsilon < 1$, từ (6.7) ta có

$$\|w^\varepsilon - w\|_{\mathbb{W}^{\alpha,\infty}(0,T;\Omega)} \leq \frac{2(1+T)\mathfrak{K}(1+2T^\alpha) + \theta}{1 - \mathfrak{M}_3\kappa} \varepsilon^{1/2}. \quad (6.10)$$

Như vậy, nghiệm chính hóa hội tụ về nghiệm chính xác với tốc độ cấp $\varepsilon^{1/2}$ (cấp Hölder), tốt hơn cấp logarit nhận được khi chọn ngưỡng chặt cụt $N_\varepsilon = 1 + \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

7. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã nghiên cứu một bài toán giá trị cuối phi tuyến cho hệ phương trình sóng–khuếch tán bậc không nguyên theo thời gian trong môi trường đàn hồi nhớt. Do bản chất không chính của các bài toán ngược, chúng tôi đã phát triển một phương pháp chính hóa bằng bộ lọc, dựa trên kỹ thuật chặt cụt phổ.

Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm dưới những điều kiện thích hợp, đồng thời đưa ra đánh giá sai số tiên nghiệm giữa nghiệm chính hóa và nghiệm chính xác, với tốc độ hội tụ cấp $\sqrt{\varepsilon}$. Trong thời gian tới, chúng tôi dự kiến nghiên cứu bài toán với dữ liệu nhiễu ngẫu nhiên và thực hiện các thí nghiệm số minh họa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Podlubny I., Fractional Differential Equations, An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.
- [2] Courant R., Hilbert D., Methods of Mathematical Physics: Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, 2008.
- [3] Diethelm K., The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type, Springer Science and Business Media, Berlin Heidelberg, 2010.
- [4] Gorenflo R., Mainardi F., Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order, in: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Eds. A. Carpinteri and F. Mainardi), Springer-Verlag, New York, 1997, 223-276.
- [5] Kilbas A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [6] Ngoc T. B., Tuan N. H., O'Regan D., Existence and uniqueness of mild solutions for a final value problem for nonlinear fractional diffusion systems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 78 (2019), 104882.
- [7] Sakamoto K., Yamamoto M., Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011), no. 1, 426-447.
- [8] Wei T., Zhang Y., The backward problem for a time-fractional diffusion-wave equation in a bounded domain, Comput. Math. Appl. 75 (2018), no. 10, 3632-3648.
- [9] Yamamoto M., Weak solutions to non-homogeneous boundary value problems for time-fractional diffusion equations, J. Math. Anal. Appl. 460 (2018), 365-381.
- [10] Nguyen D. P., Luu V. C. H., Karapinar E., Singh J., Ho D. B., Nguyen H. C., Fractional order continuity of a time semi-linear fractional diffusion-wave system, Alexandria Eng. J. (2020).

Ngày nhận bài: 03/11/2025

Ngày chấp nhận đăng: 30/6/2026