TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SÀI GÒN
ISSN
1859 - 3208
Số 91, Tập 01/2024

SAIGON UNIVERSITY
SCIENTIFIC JOURNAL
OF SAIGON UNIVERSITY
No. 91, Vol 01/2024

Email: tcdhsg@sgu.edu.vn ; Website: http://sj.sgu.edu.vn/

ĐẲNG THỨC DẠNG HARDY CHỨA TRỌNG DUNKL BẰNG PHƯƠNG PHÁP FACTORIZATION

Hardy's type identities with Dunkl weight via Factorization methods

Nguyễn Văn Phong
Trường ĐH Tài chính – Marketing

TÓM TẮT

Sử dụng phương pháp Factorization cho toán tử vi phân, chúng tôi thiết lập một đẳng thức dạng Hardy có chứa trọng Dunkl. Chúng tôi cũng thu được kết quả liên quan đến bất đẳng thức Hardy dạng cổ điển.

Từ khóa: *Bất đẳng thức Hardy - Trọng Dunkl - Factorization*

ABSTRACT

Using the factorizations of differential operators, we establish the identities of Hardy type with Dunkl weights. Also, we obtain the result which relates to the classical Hardy's inequalities.

Keywords: *Hardy inequality - Dunkl weight – Factorization*

1. Giới thiệu

Bất đẳng thức Hardy được sử dụng nhiều trong lĩnh vực Toán lý, Phương trình đạo hàm riêng và lý thuyết quang phổ và được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu và ứng dụng. Người đọc có thể tham khảo nhiều hơn trong các tài liệu [1, 8, 9, 14]. Bất đẳng thức Hardy dạng cổ điển được phát biểu như sau:

Với $N \geq 3$ và $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx. \tag{1.1}$$

Hằng số $\left((N-2)/2\right)^2$ xuất hiện trong (1.1) là tối ưu theo nghĩa

$$\inf_{u \in C_0^\infty} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) / \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 / |x|^2 dx \right\} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \cdot$$

Điều này dẫn đến đẳng thức trong (1.1) không đạt được trừ khi hàm *u* là tầm thường ($u = 0$). Việc cải tiến và mở rộng cho bất đẳng thức Hardy có rất nhiều cách tiếp cận như thay đổi các không gian hàm; mở rộng trên các miền đa tạp; thay thế các toán tử và nghiên cứu trên các không gian có độ đo khác. Một trong các cách cải tiến và mở rộng phổ biến cho bất đẳng thức Hardy là tìm cách thêm vào vế phải của (1.1) các thành phần không âm. Chẳng hạn trong [3] Brezis đã chỉ ra một kết quả sau, với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ và $0 \in \Omega$, khi đó với mọi $u \in W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$ ta có

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \geq z_0^2 \omega_N^{2/N} \, |\Omega|^{-2/N} \int_\Omega u^2 dx \tag{1.2}$$

Tác giả liên hệ: nv.phongbmt@ufm.edu.vn

trong đó ω_N là thể tích của quả cầu đơn vị, $z_0 \approx 2.4048$ là nghiệm đầu tiên của hàm Bessel $J_0(z)$. Trên quả cầu Ω thì hằng số $z_0^2\omega_N^{2/N}|\Omega|^{-2/N}$ là tối ưu, tuy nhiên hằng số này không đạt được trên $W_0^{1,2}(\Omega)$. Cũng với cách tiếp cận theo hướng này Ghoussoub và Moradifam trong [7] đưa ra các khái niệm về hàm thế cải tiến Hardy (HI-potential) và cặp Bessel (Bessel pairs) từ đó thu được các kết quả sau với $u \in W_0^{1,2}(B_R)$

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{B_R} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \ge \int_{B_R} P(|x|)u^2 dx \tag{1.3}$$

trong đó B_R là quả cầu tâm 0 bán kính R và P là một HI-potential, nghĩa là phương trình vi phân sau

$$y''(r) + (1/r)y'(r) + P(r)y(r) = 0$$

có nghiệm dương trên khoảng $(0,R)$. Tổng quát hơn, ta có

$$\int_{\Omega} V(|x|)|\nabla u|^2 dx \ge \int_{\Omega} W(|x|)u^2 dx \tag{1.4}$$

Trong đó (V,W) là cặp Bessel thõa điều kiện phương trình vi phân sau có nghiệm dương trên đoạn $(0,R)$.

$$y''(r) + \left[\frac{n-1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)}\right]y'(r) + \frac{W(r)}{V(r)}y(r) = 0 \tag{1.5}$$

Từ bất đẳng thức (1.4) bằng cách chọn các cặp hàm Bessel cụ thể ta có thể thu được các cải tiến cho bất đẳng thức Hardy xem trong [5, 13].

Trong [10] Machihara đã thiết lập được đẳng thức sau

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\tfrac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right|^2 dx = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\tfrac{x}{|x|}\cdot\nabla u + \left(\frac{N-2}{2}\right)\frac{u}{|x|}\right|^2 dx \tag{1.6}$$

Ta thấy rằng từ đẳng thức (1.6) và với kết quả sau

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \ge \int_{\mathbb{R}^N} \left|\tfrac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right|^2 dx$$

suy ra bất đẳng thức Hardy. Với *h* là hàm bán kính, được xác định bởi $h(x) = |x|^{\gamma+2-N}$. Các tác giả trong [2] thu được kết quả liên quan đến đẳng thức Hardy như sau, với $N \ge 3$ và $0 \le \gamma \le N-2$. Khi đó với $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = \gamma(N-2-\gamma)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|h(x)\nabla\left(\frac{u}{h}(x)\right)\right|^2 dx. \tag{1.7}$$

Bằng cách chọn $\gamma = (N-2)/2$, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left||x|^{\frac{2-N}{2}} \nabla \frac{u(x)}{|x|^{(2-N)/2}}\right|^2 dx \tag{1.8}$$

Cùng với cách tiếp cận này, các tác giả trong [5] cũng đưa ra kết quả mở rộng cho bất đẳng thức Hardy, với $N \geq 3, 0 < R < \infty$

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{B_R} \frac{u^2}{|x|^2} dx = \frac{z_0^2}{R^2} \int_{B_R} u^2 dx + \int_{B_R} \left|\nabla\left(\frac{|x|^{(N-2)/2}}{J_{0;R}(|x|)} u\right)\right|^2 \left|\frac{J_{0,R}(|z|)}{|x|^{(N-2)/2}}\right|^2 dx \tag{1.9}$$

trong đó $J_{0;R}(z) = J_0\left(\frac{z_0}{R} z\right)$. Tổng quát hơn với (V,W) là cặp Bessel các tác giả trong [5] thu được kết quả sau

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} W(|x|) u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\left|\nabla\left(\frac{u}{\varphi}\right)\right|^2 \varphi^2 u^2 dx \tag{1.10}$$

và

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|\Re u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} W(|x|) u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\left|\Re\left(\frac{u}{\varphi}\right)\right|^2 \varphi^2 u^2 dx \tag{1.11}$$

trong đó hàm φ là nghiệm dương của phương trình (1.5) và toán tử $\Re u = \nabla u \cdot (x|x|^{-1})$ là đạo hàm theo bán kính.

Để có thể mở rộng thêm kết quả cho bất đẳng thức Hardy, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu và thiết lập đẳng thức dạng Hardy có chứa hàm trọng Dunkl. Trường hợp này có thể được xem là sự cải tiến của bất đẳng thức Hardy bằng cách thay đổi độ đo. Cụ thể sẽ được trình bày trong phần kế tiếp.

2. Đẳng thức dạng Hardy chứa hàm trọng Dunkl

Trong phần này chúng tôi trình bày một vài khái niệm căn bản về hàm trọng Dunkl và một số các ký hiệu được sử dụng. Người đọc có thể tham khảo chi tiết hơn về lý thuyết toán tử Dunkl trong các tài liệu sau [4, 12, 15]. Để thu được kết quả chính chúng tôi sử dụng phương pháp Factorization cho toán tử vi phân để chứng minh trong trường hợp đẳng thức Hardy có chứa hàm trọng Dunkl. Phương pháp này đã được sử dụng nhiều trong các kết quả về sự mở rộng cho bất đẳng thức Hardy, như trong [2, 5]. Tuy nhiên sử dụng phương pháp này với hàm trọng Dunkl được xem như một kết quả mới mà chúng tôi sẽ trình bày chi tiết trong bài viết này.

2.1. Khái niệm và ký hiệu

Với $\alpha \in \mathbb{R}^N$, ta ký hiệu σ_α là phép phản xạ, được xác định bởi

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle x,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}\alpha, \ x \in \mathbb{R}^N,$$

trong đó $\langle x,\alpha\rangle = \sum_{i=1}^N x_i\alpha_i$ và $|\alpha|^2 = \langle \alpha,\alpha\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2$. Một tập hữu hạn $R \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ được gọi là hệ góc nếu $R \cap \alpha\mathbb{R} = \{-\alpha,\alpha\}$ và $\sigma_\alpha(R) = R$ với mọi $\alpha \in R$. Với $\alpha_0 \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\langle \alpha, \alpha_0 \rangle \neq 0$, ta định nghĩa

$$R_+ = \{\alpha \in R : \langle \alpha, \alpha_0 \rangle > 0\}$$

và $R_- = -R_+$. Khi đó hệ góc có thể biểu diễn bởi $R = R_+ \cup (-R_+)$.

Hàm bội ứng với hệ góc R, $k : R \to [0,\infty)$ là một hàm G-bất biến, nghĩa là

$$k(\alpha) = k(g\alpha), \quad \forall g \in G, \quad \forall \alpha \in R$$

trong đó G là nhóm phản xạ. Khi đó hàm trọng Dunkl $h_k(x)$ là hàm thuần nhất bậc $2\gamma_k$ được xác định bởi

$$h_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} \left|\langle \alpha, x \rangle\right|^{k(\alpha)} \tag{1.12}$$

với $\gamma_k = \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)$.

2.2. Kết quả chính

Trong phần này chúng tôi thiết lập đẳng thức dạng Hardy chứa hàm trọng Dunkl được định nghĩa như (1.12). Với $d_k = N + 2\gamma_k$. Ta có kết quả sau

Định lý 2.2.1. *Với* $N > 2 - 2\gamma_k$, *khi đó với mọi* $u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$, *ta có*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 h_k(x)\,dx &= \left|\frac{d_k - 2}{2}\right|^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} h_k(x)\,dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\frac{u}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)\right|^2 |x|^{2-d_k}\, h_k(x)\,dx. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Như một hệ quả của định lý 2.2.1 ta có bất đẳng thức dạng Hardy với hàm trọng Dunkl

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 h_k(x)\,dx \geq \left|\frac{d_k - 2}{2}\right|^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} h_k(x)\,dx \tag{1.14}$$

Đặc biệt trong trường hợp $k = 0$, thì (1.14) trở thành bất đẳng thức Hardy dạng cổ điển. Hơn nữa số hạn thứ hai trong đẳng thức (1.13) triệt tiêu nếu và chỉ nếu hàm u có dạng

$$u(x) = \frac{c}{|x|^{(d_k-2)/2}} \text{ với } c \text{ là hằng số.}$$

Tuy nhiên trong trường hợp này tích phân $\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^2 / |x|^2\right) h_k(x)dx$ phân kỳ. Khi đó ta gọi $u(x) = 1/\left(|x|^{(d_k-2)/2}\right)$ là hàm tối ưu hóa ảo cho (1.14).

Nhận xét rằng bằng cách xét bất đẳng thức dạng Hardy chứa hàm trọng số Dunkl, ta có thể mở rộng cho bất đẳng thức Hardy chứa trọng số được nhiều tác giả quan tâm và nghiên cứu trước đó. Hiện tại có nhiều phương pháp chứng minh cho bất đẳng thức Hardy, người đọc có thể tìm hiểu và tham khảo trong các tài liệu [1, 6, 7, 11, 14]. Trong bài viết này chúng tôi sử dụng phương pháp Factorization để chứng minh kết quả (1.13), đây là kết quả mới cho trường hợp đẳng thức dạng Hardy có chứa hàm trọng Dunkl.

Chứng minh định lý 2.2.1. Ta xét toán tử vi phân giá trị véc tơ được cho bởi

$$Tu = \sqrt{h_k(x)}\,\nabla u - \sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}u,\ \ u \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Ta tìm toán tử liên hợp của T như sau

$$\left\langle Tu, w\right\rangle = \left\langle \sqrt{h_k(x)}\,\nabla u - \sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}u, w\right\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sqrt{h_k(x)}\,\nabla u - \sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}u\right)\cdot w dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sqrt{h_k(x)}\,w\cdot\nabla u - u\sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot w\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(-u\,\mathrm{div}\left(\sqrt{h_k(x)}\,w\right) - u\sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot w\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}u\left(-\mathrm{div}\left(\sqrt{h_k(x)}\,w\right) - \sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot w\right)dx = \left\langle u, T^*w\right\rangle$$

Do đó toán tử liên hợp của T được xác định bởi

$$T^*w = -\mathrm{div}\left(\sqrt{h_k(x)}\,w\right) - \sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot w$$

Khi đó

$$\left\langle T^*Tu, u\right\rangle = \left\langle -\mathrm{div}\left(\sqrt{h_k(x)}\,Tu\right) - \sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot Tu, u\right\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(-u\,\mathrm{div}\left(\sqrt{h_k(x)}\,Tu\right) - u\sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot Tu\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sqrt{h_k(x)}\,Tu\cdot\nabla u - u\sqrt{h_k(x)}\,\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\cdot Tu\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sqrt{h_k(x)}\,Tu\cdot\left(\nabla u - u\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(h_k(x) \left(\nabla u - u \frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right) \cdot \left(\nabla u - u \frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right) \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \left| \frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right|^2 - \frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} \cdot \nabla |u|^2 \right) h_k(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \left| \frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right|^2 \right) h_k(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} h_k(x) \right) dx$$

Sử dụng kết quả $\dfrac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} = \dfrac{\left(|x|^{((2-d_k)/2)-1}\right)'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \left(\dfrac{x}{|x|} \right)$, ta có

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla |x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}} h_k(x) \right) = \nabla \cdot \left(x \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) \right)$$

$$= \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) \nabla \cdot x + x \nabla \left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) \right)$$

$$= \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) N + \frac{x}{|x|} h_k(x) \nabla \left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right)$$

$$+ x \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} h_k(x) \nabla \left(\frac{1}{|x|} \right) + x \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} \nabla h_k(x)$$

$$= \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) N + \frac{x}{|x|} h_k(x) \nabla \left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right)$$

$$- \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) + x \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) \sum_{\alpha \in R_+} \frac{2k(\alpha)}{|\langle \alpha, x \rangle|} \alpha$$

$$= \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) N + \frac{x}{|x|} h_k(x) \nabla \left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \right)$$

$$- \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x) + 2\gamma_k \frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}} \frac{1}{|x|} h_k(x)$$

$$=\left(N+2\gamma_k-1\right)\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\frac{1}{|x|}h_k(x)+\frac{x}{|x|}h_k(x)\nabla\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)$$

Tính toán trực tiếp ta có các kết quả sau

$$\nabla\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)=\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})''}{|x|^{(2-d_k)/2}}\frac{x}{|x|}-\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)^2\frac{x}{|x|}$$

Từ các kết quả trên và $d_k=N+2\gamma_k,\ \gamma_k=\sum_{\alpha\in R_+}k(\alpha)$ ta có

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}h_k(x)\right)=\left(d_k-1\right)\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\frac{1}{|x|}h_k(x)$$

$$+\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})''}{|x|^{(2-d_k)/2}}-\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)^2\right)h_k(x)$$

Do đó

$$\left\langle T^*Tu,u\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u\right|^2+|u|^2\left|\frac{\nabla|x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right|^2\right)h_k(x)dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}h_k(x)\right)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u\right|^2+|u|^2\left|\frac{\nabla|x|^{(2-d_k)/2}}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right|^2\right)h_k(x)dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\left[\left(\left(d_k-1\right)\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\frac{1}{|x|}\right)+\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})''}{|x|^{(2-d_k)/2}}-\left(\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right)^2\right)\right]h_k(x)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u\right|^2h_k(x)dx+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\left[\left(\left(d_k-1\right)\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})'}{|x|^{(2-d_k)/2}}\frac{1}{|x|}\right)+\frac{(|x|^{(2-d_k)/2})''}{|x|^{(2-d_k)/2}}\right]h_k(x)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u\right|^2h_k(x)dx-\left(\frac{d_k-2}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^2}h_k(x)dx$$

Mặt khác ta có

$$\left\langle T^*Tu,u\right\rangle=\left\langle Tu,Tu\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left|Tu\right|^2dx=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(|x|^{\frac{d_k-2}{2}}u\right)\right|^2|x|^{2-d_k}\,h_k(x)\,dx$$

Do đó ta thu được đẳng thức (1.13).

3. Kết luận

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng phương pháp Factorization cho toán tử vi phân, chúng tôi đã thiết lập được đẳng thức dạng Hardy chứa hàm trọng Dunkl, từ đó suy ra được bất đẳng thức dạng Hardy và bằng cách chọn hàm trọng thích hợp chúng tôi cũng thu được bất đẳng thức Hardy cổ điển. Do đó bài báo này được xem như một cách tiếp cận mới về phương pháp nhằm cải tiến cho bất đẳng thức Hardy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Balinsky, A.A., Evans, W.D., Lewis, R.T.: The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality. Universitext, p. xv+263. Springer, Cham (2015).

[2] Bogdan, K., Dyda, B. & Kim, P. Hardy Inequalities and Non-explosion Results for Semigroups. Potential Anal 44, 229–247 (2016). https://doi.org/10.1007/s11118-015-9507-0

[3] Brezis, H., Vazquez, J.L.: Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. Rev. Mat. Univ. ´Complut. Madrid 10, 443–469 (1997).

[4] C. F. Dunkl, Differential-difference operators associated to refection groups, Trans. Amer. Math. Soc, 1, 311 (1989), 167–183.

[5] Duy, N.T., Lam, N., Triet, N.A.: Improved Hardy and Hardy-Rellich type inequalities with Bessel pairs via factorizations. J. Spectr. Theory 10(4), 1277–1302 (2020).

[6] Gesztesy, F.; Littlejohn, L. L. Factorizations and Hardy-Rellich-type inequalities. Non-linear partial di¤erential equations, mathematical physics, and stochastic analysis, 207–226, EMS Ser. Congr.Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2018.

[7] Ghoussoub, N.; Moradifam, A. Functional inequalities: new perspectives and new applications. Mathematical Surveys and Monographs, 187. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.xxiv+299.

[8] Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.-E.: The Hardy Inequality. About its History and Some RelatedResults. Vydavatelsk´ y Servis, Pilsen (2007).

[9] Kufner, A., Persson, L.-E.: Weighted Inequalities of Hardy type, p. xviii+357. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge (2003).

[10] Machihara, S.; Ozawa, T.; Wadade, H. Remarks on the Hardy type inequalities with remainderterms in the framework of equalities. In Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations, pp. 247-258. Mathematical Society of Japan, 2019.

[11] Maz'ya, V.: Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations. Second, revisedand augmented edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles ofMathematical Sciences], 342, p. xxviii+866. Springer, Heidelberg (2011).

[12] M. Rosler, Dunkl operators: theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions, Lecture Notes in Math. Sci. Paris, 1817, Springer, Berlin, 2003.

[13] Nguyen, T.D., Lam-Hoang, N. & Nguyen, A.T. Hardy–Rellich identities with Bessel pairs. *Arch. Math.* **113**, 95–112 (2019). https://doi.org/10.1007/s00013-019-01305-w.

[14] Opic, B., Kufner, A.: Hardy-Type Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219,p. xii+333. Longman Scientific & Technical, Harlow (1990).

[15] V. P. Anoop and S. Parui, Hardy inequality and fractional Hardy inequality for Dunkl gradient, Isr. J. Math. 236 (2020), 247–278.

Ngày nhận bài: 12/6/2024 Ngày chấp nhận đăng: 05/7/2024