TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SÀI GÒN
ISSN
1859 - 3208
Số 94, Tập 02/2024

SAIGON UNIVERSITY
SCIENTIFIC JOURNAL
OF SAIGON UNIVERSITY
No. 94, Vol 02/2024

Email: tcdhsg@sgu.edu.vn ; Website: http://sj.sgu.edu.vn/

SỰ HỘI TỤ ĐẦY ĐỦ CỦA DÃY PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

On the complete convergence of sequences of random elements in Banach spaces

Nguyễn Văn Huấn [(1)], Nguyễn Hữu Hiếu [(2),*]

[(1)] Trường Đại học Sài Gòn.

[(2)] Trường Đại học Y Dược Thành phố Hồ Chí Minh.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về sự hội tụ đầy đủ cho dãy phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc và nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p với các tham số chuẩn hóa về dạng hàm biến đổi chậm. Chúng tôi nhận được định lí Baum-Katz cho các phần tử ngẫu nhiên độc lập có kỳ vọng không và không cùng phân phối.

Từ khóa: *các phần tử ngẫu nhiên độc lập, hàm biến đổi chậm, hội tụ đầy đủ, không gian Banach Rademacher loại p.*

ABSTRACT

In this article, we study the complete convergence for dependent random sequences taking values in Rademacher type p Banach space with slowly varying function parameters. We receive the Baum-Katz theorem for independent mean zero random elements without assumption of identical distribution.

Keywords: *independent random elements, slowly varying function, complete convergence, Rade -macher type p Banach space.*

1. Giới thiệu

Giả sử $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực khả ly và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy đối xứng Bernoulli, nghĩa là, $\{Y_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối thỏa mãn

* Tác giả liên hệ: nhhieu151094@gmail.com

$\mathbb{P}(Y_1 = \pm 1) = 1/2$. Đặt $\mathbf{E}^\infty = \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \cdots$ và

$$\mathcal{C}(\mathbf{E}) = \left\{ (v_1, v_2, \dots) \in \mathbf{E}^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} Y_n v_n \quad \text{hội tụ theo xác suất} \right\}.$$

Khi đó $\mathbf{E}$ được gọi là *không gian Rademacher loại* p $(1 \le p \le 2)$ nếu tồn tại hằng số dương C sao cho

$$\mathbb{E}\left\| \sum_{n=1}^{\infty} Y_n v_n \right\|^p \le C \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^p, \quad \forall (v_1, v_2, \dots) \in \mathcal{C}(\mathbf{E}).$$

Theo Pisier [14, 15], mọi không gian Banach thực khả ly là không gian Rademacher loại p với $1 < p \le 2$ thì nó cũng là không gian Rademacher loại q với mọi giá trị q thỏa mãn $1 \le q < p$. Mọi không gian Banach thực và khả ly đều là không gian Rademacher loại 1. Mọi không gian Hilbert và mọi không gian Banach hữu hạn chiều đều là không gian Rademacher loại 2. Đặc biệt, đường thẳng thực $\mathbb{R}$ là không gian Rademacher loại 2.

Tiếp theo chúng tôi trình bày khái niệm dãy phần tử ngẫu nhiên bị chặn yếu. Đây là một điều kiện yếu hơn giả thiết dãy phần tử ngẫu nhiên cùng phân phối.

Giả sử $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là dãy phần tử ngẫu nhiên, ta xét bất đẳng thức sau đây

$$C_1 \mathbb{P}(\|X\| > t) \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\|X_j\| > t) \le C_2 \mathbb{P}(\|X\| > t). \tag{1.1}$$

Nếu tồn tại hằng số dương $C_1\,(C_2)$ sao cho bất đẳng thức vế trái (tương ứng, vế phải) của (1.1) đúng với mọi $n \ge 1$ và $t \ge 0$ thì dãy phần tử ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ được gọi là *bị chặn dưới (trên)* yếu bởi X. Dãy phần tử ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ được gọi là *bị chặn yếu* bởi X nếu vừa bị chặn dưới yếu vừa bị chặn trên yếu bởi X. Lưu ý rằng (1.1) hiển nhiên đúng với $X = X_1$ và $C_1 = C_2 = 1$ nếu $\{X_n, n \ge 1\}$ là dãy phần tử ngẫu nhiên cùng phân phối.

Hàm biến đổi chậm là khái niệm quan trọng trong lý thuyết xác suất, đã được nhiều tác giả nghiên cứu như Karamata [12, 13], Senta [16], Bingham và các cộng sự [3].

Hàm số thực $L(\cdot)$ được gọi là hàm *biến đổi chậm* (ở vô cực) nếu nó là hàm đo được, không âm trên $[a, +\infty)$ với $a \ge 0$ và với mỗi $\lambda > 0$, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1. \tag{1.2}$$

Chúng ta có thể chỉ ra một số ví dụ về hàm biến đổi chậm như: $\log x, \log(\log x)$, $\dfrac{\log x}{\log(\log x)}$, $\log_\alpha x$, $(\log_\alpha x)^\beta$ (với $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$).

Hsu và Robbins [9] đã giới thiệu khái niệm hội tụ đầy đủ và chứng minh được dãy trung bình số học của các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối hội tụ đầy đủ đến kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên nếu phương sai của các biến ngẫu nhiên hữu hạn. Chiều ngược lại được chứng minh bởi Erdös [4, 5]. Một kết quả quan trọng mở rộng định lí Hsu-Robbins-Erdös được xuất hiện trong bài báo nổi tiếng của Baum và Katz (chi tiết xem [2]). Các tác giả đã sử dụng kỹ thuật đối xứng hóa để thiết lập định lí đánh giá tốc độ hội tụ trong luật số lớn.

Trong [11, Định lí 2.1 và 2.5], tác giả đã sử dụng kỹ thuật chặt cụt để phát triển định lí Baum-Katz cho trường hợp dãy phần tử ngẫu nhiên bị chặn yếu và nhận giá trị trong không gian Banach. Dưới đây là hai kết quả chính trong [11].

Định lí 1.1. *Cho p, α là các số thực dương ($1 < p \le 2, 1/p < \alpha < 1$) và hằng số $\beta \in \{0; 1\}$, $\{X_n, n \ge 1\}$ là dãy phần tử ngẫu nhiên độc lập, kỳ vọng 0 và nhận giá trị trên không gian Rademacher loại p. Giả sử rằng dãy $\{X_n, n \ge 1\}$ bị chặn yếu bởi X. Khi đó, hai mệnh đề sau là tương đương:*

$$\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha}(\log^+\|X\|)^{\beta}\right) < \infty; \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\beta}}{n} \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{j=1}^{k} X_j\right\| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0, \tag{1.4}$$

trong đó logarit được lấy theo cơ số 2, $\log^+ x = \log_2(\max\{2, x\})$.

Trong bài báo này, chúng tôi thống nhất phương pháp chứng minh các Định lí 2.1 và 2.5 trong [11] và mở rộng các kết quả này theo hướng chuẩn hóa các tham số về dạng hàm biến đổi chậm. Định lí sau đây là kết quả chính của bài báo.

Định lí 1.2. *Cho p, α là các số thực dương ($1 < p \le 2, 1/p < \alpha < 1$), $L : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ là hàm biến đổi chậm không giảm và $\{X_n, n \ge 1\}$ là dãy phần tử ngẫu nhiên độc lập, kỳ vọng 0 và nhận giá trị trên không gian Rademacher loại p. Giả sử rằng dãy $\{X_n, n \ge 1\}$ bị chặn yếu bởi X. Khi đó, hai mệnh đề sau là tương đương:*

$$\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha}L(\|X\|^{1/\alpha})\right) < \infty; \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{j=1}^{k} X_j\right\| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0. \tag{1.6}$$

Nhận xét 1.3. Lưu ý rằng, $f(x) = 1$ và $g(x) = \log_2(\max\{2, x^{\alpha}\})$ trên $[0; +\infty)$ là các hàm biến đổi chậm không giảm. Vì vậy, nếu áp dụng Định lí 1.2 với hàm $L(x) = f(x)$ ta thu được Định lí 1.1 cho trường hợp $\beta = 0$ và với hàm $L(x) = g(x)$ ta thu được Định lí 1.1 cho trường hợp $\beta = 1$. Ngoài ra, khi $\beta \ge 0$ hàm $h(x) = (\log_2(\max\{2, x^{\alpha}\}))^{\beta}$ trên $[0; +\infty)$ cũng là hàm biến đổi chậm không giảm. Do đó, từ Định lí 1.2 với hàm $L(x) = h(x)$ ta có Định lí 1.1 cũng đúng cho mọi $\beta \ge 0$.

Vì $\mathbb{R}$ là một không gian Rademacher loại 2 nên Định lí 1.2 kéo theo hệ quả dưới đây.

Hệ quả 1.4. *Cho α là số thực dương thỏa mãn $1/2 < \alpha < 1$, $L : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ là hàm biến đổi chậm không giảm. Giả sử $\{X_n, n \ge 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, kỳ* *vọng 0 và bị chặn yếu bởi biến ngẫu nhiên X. Khi đó, hai phát biểu sau là tương đương:*

$$\mathbb{E}\left(|X|^{1/\alpha}L(|X|^{1/\alpha})\right) < \infty; \tag{1.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{j=1}^{k}X_j\right| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0. \tag{1.8}$$

2. Chứng minh

Trong mục này, C là một hằng số dương và giá trị có thể thay đổi trong mỗi lần xuất hiện, $\mathbb{I}(A)$ là hàm chỉ tiêu của tập hợp A.

Để chứng minh kết quả chính, chúng tôi sẽ sử dụng một số bổ đề dưới đây. Bổ đề đầu tiên thuộc về Gan [6], chi tiết chứng minh có thể tham khảo trong [6, Hệ quả 2.2].

Bổ đề 2.1. *Giả sử $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là các phần tử ngẫu nhiên độc lập, kỳ vọng 0 và nhận giá trị trong không gian Rademacher loại p $(1 < p \le 2)$. Khi đó, với mọi $q \ge p$ thì*

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{j=1}^{k}X_j\right\|^{q}\right) \le C\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left\|X_j\right\|^{q} + \left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left\|X_j\right\|^{p}\right)^{q/p}\right),$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào n.

Bổ đề sau được suy ra trực tiếp từ [7, Bổ đề 2.1].

Bổ đề 2.2. *Giả sử α, β là các số thực dương và $\{X_n, n \ge 1\}$ là dãy phần tử ngẫu nhiên bị chặn trên yếu bởi X. Khi đó, với mọi $n \ge 1$ ta có*

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left\|X_j\mathbb{I}\left(\|X_j\| > n^{\alpha}\right)\right\|^{\beta} \le Cn\mathbb{E}\left(\|X\|^{\beta}\mathbb{I}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right)\right)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left\|X_j\mathbb{I}\left(\|X_j\| \le n^{\alpha}\right)\right\|^{\beta} \le Cn\mathbb{E}\left(\|X\|^{\beta}\mathbb{I}\left(\|X\| \le n^{\alpha}\right)\right) + Cn^{\alpha\beta+1}\mathbb{P}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right)$.

Bổ đề sau là một hệ quả của định lí Karamata (xem [3, Định lí 1.5.11]) và chúng ta có thể tìm thấy nó trong [8, Bổ đề 7.3] và [1, Bổ đề 2.5].

Bổ đề 2.3. *Giả sử $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm. Khi đó*

(i) $\displaystyle C_1n^{r+1}L(n) \le \sum_{j=1}^{n}j^{r}L(j) \le C_2n^{r+1}L(n)$ *với* $r > -1$;

(ii) $\displaystyle C_1n^{r+1}L(n) \le \sum_{j=n}^{\infty}j^{r}L(j) \le C_2n^{r+1}L(n)$ *với* $r < -1$.

Bổ đề 2.4. *Giả sử α, γ là các số thực $(\alpha > 0, \gamma \ge 0)$, $L : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ là hàm biến đổi chậm không giảm và X là phần tử ngẫu nhiên thỏa mãn (1.5). Khi đó*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n^{\alpha\gamma}}\mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma}\mathbb{I}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right)\right) < \infty$ *nếu* $\alpha\gamma < 1$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{L(n)}{n^{\alpha\gamma}} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}\left(\|X\| \leq n^{\alpha}\right)\right) < \infty$ *nếu* $\alpha\gamma > 1$.

Chứng minh. (i). Áp dụng Bổ đề 2.3 ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^{\alpha\gamma}} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right)\right) \\
&\quad= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha\gamma} L(n) \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}(k^{\alpha} < \|X\| \leq (k+1)^{\alpha})\right) \\
&\quad= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}(k^{\alpha} < \|X\| \leq (k+1)^{\alpha})\right) \sum_{n=1}^{k} n^{-\alpha\gamma} L(n) \\
&\quad\leq C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha\gamma+1} L(k) \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}(k^{\alpha} < \|X\| \leq (k+1)^{\alpha})\right) \\
&\quad\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha(-\alpha\gamma+1)} L(\|X\|^{1/\alpha}) \|X\|^{\gamma} \mathbb{I}(k^{\alpha} < \|X\| \leq (k+1)^{\alpha})\right) \\
&\quad= C\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha} L(\|X\|^{1/\alpha}) \mathbb{I}(\|X\| > 1)\right) < \infty.
\end{aligned}$$

(ii). Dễ thấy rằng, với mọi số nguyên $k \geq 2$ ta có $k-1 \geq k/2$. Hơn nữa, từ (1.2) ta có $\lim_{k \to +\infty} L(k)/L\left(k/2\right) = 1$ nên dãy số $\{L(k)/L\left(k/2\right), k \geq 1\}$ bị chặn. Do đó

$$\frac{L(k)}{L(k-1)} \leq \frac{L(k)}{L\left(k/2\right)} \leq C \text{ suy ra } L(k) \leq CL(k-1),$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc vào k. Áp dụng Bổ đề 2.3 ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^{\alpha\gamma}} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}\left(\|X\| \leq n^{\alpha}\right)\right) \\
&\quad= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha\gamma} L(n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}((k-1)^{\alpha} < \|X\| \leq k^{\alpha})\right) \\
&\quad= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}((k-1)^{\alpha} < \|X\| \leq k^{\alpha})\right) \sum_{n=k}^{\infty} n^{-\alpha\gamma} L(n) \\
&\quad\leq C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha\gamma+1} L(k) \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}((k-1)^{\alpha} < \|X\| \leq k^{\alpha})\right) \\
&\quad\leq C + C \sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha\gamma+1} L(k-1) \mathbb{E}\left(\|X\|^{\gamma} \mathbb{I}((k-1)^{\alpha} < \|X\| \leq k^{\alpha})\right) \\
&\quad\leq C + C \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha(-\alpha\gamma+1)} L(\|X\|^{1/\alpha}) \|X\|^{\gamma} \mathbb{I}((k-1)^{\alpha} < \|X\| \leq k^{\alpha})\right) \\
&\quad= C + C\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha} L(\|X\|^{1/\alpha}) \mathbb{I}(\|X\| > 1)\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.5. *Cho* p, α *là các số thực dương* $(1 < p \leq 2,\ \alpha < 1)$ *và* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là dãy phần tử ngẫu nhiên kỳ vọng* 0 *nhận giá trị trên không gian Rademacher loại* p.

$L : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ là hàm biến đổi chậm không giảm và tồn tại giá trị x_0 sao cho $L(x_0) > 0$. Giả sử rằng dãy $\{X_n, n \geq 1\}$ bị chặn trên yếu bởi X và thỏa mãn (1.5). Khi đó

$$\frac{1}{n^\alpha} \max_{1\leq k\leq n} \left\| \mathbb{E} \sum_{j=1}^{k} X_j \mathbb{I}\left(\|X_j\| \leq n^\alpha\right) \right\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Trước tiên, ta sẽ chứng minh (1.5) kéo theo

$$\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha}\right) < \infty. \tag{2.1}$$

Thật vậy, $L(x) \geq L(x_0) = \delta > 0$ với mọi $x \geq x_0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha}\right) &= \int\limits_{\left(L(\|X\|^{1/\alpha})<\delta\right)} \|X\|^{1/\alpha} d\mathbb{P} + \int\limits_{\left(L(\|X\|^{1/\alpha})\geq\delta\right)} \|X\|^{1/\alpha} d\mathbb{P} \\
&\leq \int\limits_{\left(L(\|X\|^{1/\alpha})<\delta\right)} C d\mathbb{P} + \int\limits_{\left(L(\|X\|^{1/\alpha})\geq\delta\right)} C\|X\|^{1/\alpha} L(\|X\|^{1/\alpha}) d\mathbb{P} \\
&\leq C + C\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha} L(\|X\|^{1/\alpha})\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Từ giả thiết $\mathbb{E}X_n = 0$ và Bổ đề 2.2 ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^\alpha} \max_{1\leq k\leq n} \left\| \mathbb{E} \sum_{j=1}^{k} X_j \mathbb{I}\left(\|X_j\| \leq n^\alpha\right) \right\| &\leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\|X_j\| \mathbb{I}(\|X_j\| > n^\alpha)\right) \\
&\leq \frac{C}{n^{\alpha-1}} \mathbb{E}\left(\|X\| \mathbb{I}(\|X\| > n^\alpha)\right) \leq C\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha} \mathbb{I}(\|X\|^{1/\alpha} > n)\right).
\end{aligned}$$

Hơn nữa, từ (2.1) và định lí Lebesgue về sự hội tụ và bị chặn ta có

$$\mathbb{E}\left(\|X\|^{1/\alpha} \mathbb{I}(\|X\|^{1/\alpha} > n)\right) \to 0.$$

Do đó bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.6. *Giả sử α, p là các số thực dương ($1 < p \leq 2$) và $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy phần tử ngẫu nhiên độc lập. Đặt $A_k = (\|X_k\| > n^\alpha), 1 \leq k \leq n$. Khi đó*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{I}(A_k) - \mathbb{P}(A_k)\right)\right|^p \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Chứng minh. Đặt $Y_k = \mathbb{I}(A_k) - \mathbb{P}(A_k)$. Khi đó $\{Y_k, 1 \leq k \leq n\}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, kỳ vọng 0. Áp dụng Bổ đề 2.1 cho $q = p$, các bất đẳng thức C_r, Jensen ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{I}(A_k) - \mathbb{P}(A_k)\right)\right|^p &\leq \mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} \left|\sum_{j=1}^{k} Y_j\right|^p\right) \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|Y_k\right|^p \\
&= C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\mathbb{I}(A_k) - \mathbb{E}(\mathbb{I}(A_k))\right|^p \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(|\mathbb{I}(A_k)|^p + |\mathbb{E}(\mathbb{I}(A_k))|^p\right) \\
&\leq C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{I}(A_k) + \mathbb{E}|\mathbb{I}(A_k)|^p\right) = C \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.7. [10] *Giả sử rằng tập hợp các biến cố* $\{A_k, 1 \le k \le n\}$ *thỏa mãn*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{I}(A_k)-\mathbb{P}(A_k)\right)\right|^p \le \theta\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k) \text{ với } p>1.$$

Khi đó

$$\left(1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\right)^{p/(p-1)}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_k\right) \le \theta^{1/(p-1)}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right).$$

Bổ đề 2.8. *Cho* α, β *là các số thực dương,* X *là phần tử ngẫu nhiên và* $L : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *là hàm biến đổi chậm không giảm. Khi đó, nếu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha\beta-1}L(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right) < \infty$$

thì

$$\mathbb{E}\left(\|X\|^{\beta}L(\|X\|^{1/\alpha})\right) < \infty.$$

Chứng minh. Từ những lập luận như trong phần chứng minh Bổ đề 2.4, ta có $L(k+1) \le CL(k)$ với mọi $k \ge 1$. Do đó, theo Bổ đề 2.3,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\|X\|^{\beta}L(\|X\|^{1/\alpha})\right) &= \mathbb{E}\left(\|X\|^{\beta}L(\|X\|^{1/\alpha})\right)\mathbb{I}\left(\|X\|^{1/\alpha} \le 1\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\|X\|^{\beta}L(\|X\|^{1/\alpha})\mathbb{I}\left(k < \|X\|^{1/\alpha} \le k+1\right)\right) \\
&\le C + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left((k+1)^{\alpha\beta}L(k+1)\mathbb{I}\left(k < \|X\|^{1/\alpha} \le k+1\right)\right) \\
&\le C + C\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(k^{\alpha\beta}L(k)\mathbb{I}\left(k < \|X\|^{1/\alpha} \le k+1\right)\right) \\
&\le C + C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} n^{\alpha\beta-1}L(n)\mathbb{P}\left(k < \|X\|^{1/\alpha} \le k+1\right) \\
&\le C + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha\beta-1}L(n)\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\left(k < \|X\|^{1/\alpha} \le k+1\right) \\
&= C + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha\beta-1}L(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh Định lí 1.2. Nhận thấy, nếu $L(x) = 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$ thì định lí hiển nhiên đúng. Ta cần chứng minh với trường hợp tồn tại x_0 để $L(x_0) > 0$.

Với $n \ge 1$ và $1 \le k \le n$ ta đặt

$$X_{nk} = X_k\mathbb{I}\left(\|X_k\| \le n^{\alpha}\right), \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad S_{nk} = \sum_{j=1}^{k} X_{nj}.$$

Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ dễ thấy

$$\left(\max_{1\le k\le n}\|S_k\| > \varepsilon n^\alpha\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n}\left(\|X_k\| > n^\alpha\right) \cup \left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk}\| > \varepsilon n^\alpha\right).$$

Từ đó, với n đủ lớn áp dụng Bổ đề 2.5 ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_k\| > \varepsilon n^\alpha\right) &\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\|X_k\| > n^\alpha\right) + \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk}\| > \varepsilon n^\alpha\right)\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\|X_k\| > n^\alpha\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^\alpha}\max_{1\le k\le n}\|S_{nk}\| - \frac{1}{n^\alpha}\max_{1\le k\le n}\|\mathbb{E}S_{nk}\| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\|X_k\| > n^\alpha\right) + \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk} - \mathbb{E}S_{nk}\| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right)\\
&\le Cn\mathbb{P}\left(\|X\| > n^\alpha\right) + \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk} - \mathbb{E}S_{nk}\| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_k\| > \varepsilon n^\alpha\right)\\
&\quad\le CL(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^\alpha\right) + \frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk} - \mathbb{E}S_{nk}\| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Markov, Bổ đề 2.1, bất đẳng thức C_r, bất đẳng thức Jensen và Bổ đề 2.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk} - \mathbb{E}S_{nk}\| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right) &\le Cn^{-\alpha p}\mathbb{E}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_{nk} - \mathbb{E}S_{nk}\|\right)^p\\
&\le Cn^{-\alpha p}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\|X_{nk} - \mathbb{E}X_{nk}\|^p \le Cn^{-\alpha p}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\|X_{nk}\|^p + \|\mathbb{E}X_{nk}\|^p\right)\\
&\le Cn^{-\alpha p}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\|X_{nk}\|^p + \mathbb{E}\|X_{nk}\|^p\right) = Cn^{-\alpha p}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\|X_{nk}\|^p\\
&\le C\left(n^{1-\alpha p}\mathbb{E}\left(\|X\|^p\mathbb{I}\left(\|X\| \le n^\alpha\right)\right) + n\mathbb{P}\left(\|X\| > n^\alpha\right)\right).
\end{aligned}$$

Điều này cùng với (2.2) và Bổ đề 2.4 ta được

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\|S_k\| > \varepsilon n^\alpha\right)\\
&\quad\le C\sum_{n=1}^{\infty}L(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^\alpha\right) + C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n^{\alpha p}}\mathbb{E}\left(\|X\|^p\mathbb{I}\left(\|X\| \le n^\alpha\right)\right) < \infty.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Như vậy (1.6) đúng.

Tiếp theo ta giả sử rằng (1.6) được thỏa mãn. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức $\max_{1\le j\le n}\|X_j\| \le 2\max_{1\le j\le n}\|S_j\|$ với mọi $n \ge 1$, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n}\|X_j\| > \varepsilon n^\alpha\right) < \infty, \forall\varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Dễ thấy, với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và n là số tự nhiên thỏa mãn $2^k \le n \le 2^{k+1}$ ta có

$$\left(\max_{1\le j\le 2^k} \|X_j\| > \varepsilon (2^k)^\alpha\right) \subset \left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > \varepsilon 2^{-\alpha} n^\alpha\right). \tag{2.5}$$

Mặt khác, tồn tại hằng số C sao cho $CL(n) \ge CL(x_0) \ge 1$ với mọi $n \ge [x_0]+1$. Từ đó, điều này kết hợp với (2.4) và (2.5) ta được

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le 2^k} \|X_j\| > \varepsilon (2^k)^\alpha\right)\\
&\quad\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > \varepsilon 2^{-\alpha} n^\alpha\right)\\
&\quad\le C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > \varepsilon 2^{-\alpha} n^\alpha\right)\\
&\quad\le C + C\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} \frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > \varepsilon 2^{-\alpha} n^\alpha\right)\\
&\quad\le C + C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n}\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > \varepsilon 2^{-\alpha} n^\alpha\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le 2^k} \|X_j\| > \varepsilon (2^k)^\alpha\right) \to 0 \text{ khi } k\to\infty \text{ với mọi } \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

Lại có, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\bigcup_{n=2^{m-1}}^{2^m} \left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > n^\alpha\right) \subset \left(\max_{1\le j\le 2^m} \|X_j\| > 2^{-\alpha}(2^m)^\alpha\right).$$

Khi đó, từ (2.6) ta có

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > n^\alpha\right) \to 0 \text{ khi } n\to\infty. \tag{2.7}$$

Từ các Bổ đề 2.6, 2.7 và (2.7) tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(\|X_j\| > n^\alpha\right) \le C\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n} \|X_j\| > n^\alpha\right) \text{ với mọi } n \ge n_0. \tag{2.8}$$

Kết hợp (1.1), (2.4) và (2.8) ta được

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right)\\
&\quad = \sum_{n=1}^{n_0} L(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} L(n)\mathbb{P}\left(\|X\| > n^{\alpha}\right)\\
&\quad \le C + C\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-1}L(n)\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\left(\|X_j\| > n^{\alpha}\right)\\
&\quad \le C + C\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-1}L(n)\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n}\|X_j\| > n^{\alpha}\right)\\
&\quad \le C + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}L(n)\mathbb{P}\left(\max_{1\le j\le n}\|X_j\| > n^{\alpha}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Do đó, từ Bổ đề 2.8 ta có (1.5) đúng. Định lí được chứng minh. □

Tài liệu tham khảo

[1] V. T. N. Anh, N. T. T. Hien, L. V. Thanh, V. T. H. Van. The Marcinkiewicz-Zygmund-type strong law of large numbers with general normalizing sequences. *Journal of Theoretical Probability,* vol. 34, p. 331-348. 2021.

[2] L. E. Baum, M. Katz. Convergence rates in the law of large numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 120, p. 108-123. 1965.

[3] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. Regular variation. *Cambridge University Press*, vol. 27. 1987.

[4] P. Erdös. On a theorem of Hsu and Robbins. *Ann. Math. Statistics*, vol. 20, p. 286-291. 1949.

[5] P. Erdös. Remark on my paper "On a theorem of Hsu and Robbins". *Ann. Math. Statistics*, vol. 21, p. 138. 1950.

[6] S. Gan. Moment inequalities for b-valued random vectors with applications to the strong limit theorems. *Statistics Probability Letters*, vol. 67, p. 111-119. 2004.

[7] A. Gut. Complete convergence for arrays. *Period. Math. Hungar.*, vol. 25, p. 51-75. 1992.

[8] A. Gut. Probability: A graduate course. *Springer-Verlag, New York*, vol. 75. 2013.

[9] P. L. Hsu, H. Robbins. Complete convergence and the law of large numbers. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 33, p. 25-31. 1947.

[10] N. V. Huan. The Baum-Katz theorem for dependent sequences. *Acta Math. Hungar.*, vol. 151, p. 162-172. 2017.

[11] N. V. Huan. On the complete convergence of sequences of random elements in banach spaces. *Acta Math. Hungar.*, vol. 159, p. 511-519. 2019.

[12] J. Karamata. Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica (Cluj)*, vol. 4, p. 38-53. 1930.

[13] J. Karamata. Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bull. Soc. Math. France*, vol. 61, p. 55-62. 1933.

[14] G. Pisier. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. *Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin*, vol. 1206, p. 167-241. 1986.

[15] G. Pisier. Martingales in Banach Spaces. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge*, vol. 155. 2016.

[16] E. Seneta. Regularly varying functions. *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York*, vol. 508. 1976.

Ngày nhận bài: 25/11/2024 Ngày chấp nhận đăng: 15/01/2025